



TESIS - EE185401

**KETERKENDALIAN DAN KETERAMATAN DARI  
*PARTIALLY OBSERVABLE* SISTEM AUGMENTASI  
QUADCOPTER UNTUK TERBANG HOVER**

MOH. KHOIRON  
071111650020004

DOSEN PEMBIMBING  
Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.  
Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T.

PROGRAM MAGISTER  
BIDANG KEAHLIAN TEKNIK SISTEM PENGATURAN  
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO  
FAKULTAS TEKNOLOGI ELEKTRO  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2019





**TESIS - EE185401**

**KETERKENDALIAN DAN KETERAMATAN DARI  
PARTIALLY OBSERVABLE SISTEM AUGMENTASI  
QUADCOPTER UNTUK TERBANG HOVER**

**MOH. KHOIRON**  
071111650020004

**DOSEN PEMBIMBING**  
Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.  
Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T.

**PROGRAM MAGISTER**  
**BIDANG KEAHLIAN TEKNIK SISTEM PENGATURAN**  
**DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO**  
**FAKULTAS TEKNOLOGI ELEKTRO**  
**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**  
**SURABAYA**  
**2019**





**TESIS - EE185401**

**CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF  
PARTIALLY OBSERVABLE QUADCOPTER  
AUGMENTED SYSTEM FOR FLYING HOVER**

**MOH. KHOIRON**  
071111650020004

**SUPERVISOR**  
Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.  
Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T.

**MASTER PROGRAM  
CONTROL SYSTEM  
DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING  
FACULTY OF ELECTRICAL TECHNOLOGY  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2019**



## LEMBAR PENGESAHAN

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Teknik (M.T)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

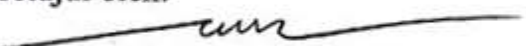
oleh:


Moh. Khoiron

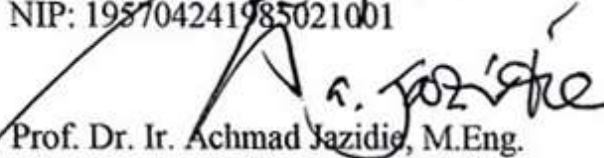
NRP. 071111650020004

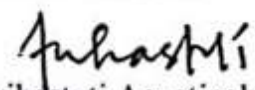
Tanggal Ujian : 28 Desember 2018  
Periode Wisuda : Maret 2019

Disetujui oleh:

  
1. Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D. (Pembimbing I)  
NIP: 195501231980031002

  
2. Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T. (Pembimbing II)  
NIP: 195704241985021001

  
3. Prof. Dr. Ir. Achmad Jazidie, M.Eng. (Penguji)  
NIP: 195902191986101001

  
4. Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT. (Penguji)  
NIP: 196808121994032001



Dekan Fakultas Teknologi Elektro

  
Dr. Iri Ariel Sardjono, S.T., M.T.  
NIP. 197002121995121001

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi keseluruhan Tesis saya dengan judul “**KETERKENDALIAN DAN KETERAMATAN DARI PARTIALLY OBSERVABLE SISTEM AUGMENTASI QUADCOPTER UNTUK TERBANG HOVER**” adalah benar-benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diizinkan dan bukan merupakan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya sendiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila ternyata pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku

Surabaya, 9 Desember 2018



Moh. Khoiron

071111650020004

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# **KETERKENDALIAN DAN KETERAMATAN DARI PARTIALLY OBSERVABLE SISTEM AUGMENTASI QUADCOPTER UNTUK TERBANG HOVER**

Nama mahasiswa : Moh. Khoiron  
NRP : 2216202004  
Pembimbing : 1. Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.  
2. Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T.

## **ABSTRAK**

Quadcopter dilengkapi dengan sensor redundan sebagai jaminan untuk keteramatan dan keterkendaliannya. Tapi, ketika quadcopter mengalami kegagalan multi-sensor sekaligus, kemampuan pengendalian dan pengamatan quadcopter akan memburuk. Penelitian ini menganalisis tetapnya keteramatan dan keterkendalian quadcopter di bawah kegagalan sensor yang parah. Diasumsikan bahwa semua sensor rotor berada dalam kondisi gagal, oleh karena itu quadcopter bergantung pada sensor *Inertial Measurement Unit* (IMU) dan *Global Positioning System* (GPS) (receiver). Tujuannya adalah menemukan kombinasi kegagalan sensor IMU-GPS yang membuat quadcopter masih sepenuhnya atau sebagian dapat diamati dan dikendalikan. Untuk tujuan ini, dinamika quadcopter dimodelkan sebagai sistem kaskade dari dinamika rotor quadcopter dan dinamika badan quadcopter, yang dikombinasikan untuk membentuk model augmentasi dinamika quadcopter. Namun, kemampuan pengamatan dan pengendalian loop tertutup bergantung pada sensor yang masih berfungsi. Algoritma untuk menentukan sinyal input untuk kontrol loop tertutup di bawah beberapa skenario kegagalan sensor diturunkan. Algoritma ini divalidasi menggunakan simulasi.

Kata kunci: Sistem kaskade, keteramatan, keterkendalian, kegagalan sensor, quadcopter.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# **CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF PARTIALLY OBSERVABLE QUADCOPTER AUGMENTED SYSTEM FOR FLYING HOVER**

By : Moh. Khoiron  
Student Identity Number : 2216202004  
Supervisor(s) : 1. Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.  
2. Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T.

## **ABSTRACT**

Quadcopters are equipped with redundant sensors as an assurance for their observability and controllability. However, when they experienced multi sensor faults at once, their controllability and observability will be deteriorated. This study analyzes perseverance of observability and controllability of quadcopters under severe sensor faults. It is assumed that all rotor sensors are in fault conditions hence quadcopters rely on Inertial Measurement Unit (IMU) and Global Positioning System (GPS) sensors (receiver). The interests are in finding the combinations of IMU-GPS sensor faults that make quadcopters are still fully or are partially observable and controllable. For this purpose, quadcopter dynamics is modelled as a cascade of quadcopter rotor dynamics and quadcopter body dynamics, which are combined to form an augmented model of quadcopters dynamics. Their observability and closed loop controllability, however, depend on which sensor(s) is still functioning. Algorithms for determining the input signals for closed loop controllability under several sensor faults scenarios are derived. These algorithms are validated using simulations.

Key words: Cascade system, observability, controllability, sensor fault, quadcopter

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, rasa syukur tak terkira penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah meniupkan roh pada jasad penulis, skenario kehidupan yang memukau, serta nikmat untuk bisa mensyukuri. Sholawat serta salam tetap tercurahkan pada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membukakan cahaya langit juga untuk keluarga dan sahabat-sahabat nabi.

Dalam proses pembuatan Tesis ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Tri Arief Sardjono, S.T., M.T selaku Dekan Fakultas Teknologi Elektro-ITS.
2. Dr. Eng. Ardyono Priyadi, S.T., M.Eng. selaku Kepala Departemen Teknik Elektro-ITS
3. Prof. Ir. Abdullah Alkaff, M.Sc. Ph.D.dan Ir. Rusdhianto Effendi A.K., M.T. sebagai dosen pembimbing Tesis atas segala kesabarannya dan kesungguhannya dalam membimbing serta perhatian yang telah diberikan kepada penulis. Tanpa beliau-beliau penulisan tesis ini sangat mungkin untuk tidak selesai
4. Prof. Dr. Ir. Achmad Jazidie, M.Eng dan Dr. Trihastuti Agustinah, S.T. M.T. selaku dosen penguji.
5. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh *staff* Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Teknik Elektro-ITS.
6. Keluarga besar Abd. Rosyid dan Maizahro di Bangkalan
7. Keluarga besar Agus Rifa'i A. dan Sumiyati di Banjarnegara
8. Istri tercinta Imroatul Hudati

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan Tesis ini masih banyak kekurangan. Untuk itu, semua kritik dan saran selalu diterima untuk perbaikan.

Surabaya, 04 Nopember 2018

Penulis

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR .....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xvii
DAFTAR TABEL .....	xix
BAB 1 PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan .....	3
1.4 Batasan Masalah .....	3
1.5 Kontribusi .....	4
1.6 Metodologi Penelitian .....	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA .....	7
2.1 Kajian Penelitian Terkait .....	7
2.1.1 Reconfigurable control of an UAV against sensor/actuator failures [22] .....	7
2.1.2 Dynamic Sensor Allocation Framework for Fault Tolerant Flight Control [23] .....	9
2.1.3 Use of Observers for The Inversion of Nonlinear Maps [28] .....	12
2.2 Teori Dasar .....	14
2.2.1 <i>Brushless DC</i> (BLDC) Motor [29] .....	14
2.2.2 Model Dinamika Quacopter [15] .....	16
2.2.3 Keterkendalian dan Keteramatan [1, 7] .....	18
2.2.4 Sistem kaskade [8] .....	21
2.2.5 State Feedback [24] .....	22

2.2.6	Diferensial Vektor [24] .....	22
2.2.7	Singular Value Decomposition [30] dan Pseudoinverse [26] .....	23
2.2.8	Inertial Measurement Unit (IMU) [31] .....	24
2.2.9	Global Positioning System (GPS) [31] .....	27
2.2.10	Observer [32].....	28
<b>BAB 3 PERANCANGAN ANALISIS SISTEM QUADCOPTER .....</b>		<b>29</b>
3.1	Struktur dan Model Konseptual Sistem Pengendalian Quadcopter .....	30
3.1.1	Quadcopter .....	30
3.1.2	Sensor .....	37
3.1.3	Data Acquisition Board (DAB) dan Embedded Computer (EC) .....	38
3.1.4	Pengatur Kecepatan Rotor (PKR) .....	40
3.2	Kegagalan Komponen Sensor .....	41
3.3	Analisis Keteramatan Quadcopter .....	43
3.4	Observer .....	46
3.5	Diagram Blok Toleransi Kegagalan Sistem Pengendalian Quadcopter ..	46
3.6	Analisis Keterkendalian Quadcopter Loop Tertutup.....	46
<b>BAB 4 PERAN IMU PADA KETERAMATAN DAN KETERKENDALIAN</b>		
<b>SISTEM QUADCOPTER .....</b>		<b>49</b>
4.1	Peran Sensor IMU .....	49
4.1.1	Analisis Keteramatan .....	49
4.1.2	Observer Quadcopter.....	52
4.1.3	Analisis Keterkendalian Loop Tertutup .....	53
4.1.4	Algoritma Penerapan Peran Sensor IMU .....	55
4.2	Peran Sensor Gyro.....	56
4.2.1	Analisis Keteramatan .....	56
4.2.2	Observer Quadcopter.....	57
4.2.3	Analisis Keterkendalian Loop Tertutup .....	58
4.2.4	Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro.....	58
4.3	Peran Sensor Accelero.....	59
4.3.1	Analisis Keteramatan .....	59
4.3.2	Observer Quadcopter.....	63
4.3.3	Analisis Keterkendalian Loop Tertutup .....	64

4.3.4	Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro .....	67
BAB 5 PERAN GPS PADA KETERAMATAN DAN KETERKENDALIAN SISTEM QUADCOPTER.....		69
5.1	Peran GPS-receiver .....	69
5.1.1	Analisis Keteramatan .....	69
5.1.2	Observer Quadcopter .....	71
5.1.3	Analisis Keterkendalian Loop Tertutup.....	71
5.1.4	Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro .....	72
BAB 6 VALIDASI.....		73
6.1	Validasi Hasil analisis peran sensor IMU .....	73
6.1.1	Peran IMU Sempurna dan Sensor Gyro .....	73
6.1.2	Peran Sensor Sccebero.....	75
6.2	Validasi Hasil analisis peran sensor GPS .....	77
BAB 7 KESIMPULAN.....		81
DAFTAR PUSTAKA .....		83
LAMPIRAN .....		89
DAFTAR INDEX .....		91

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Hasil estimasi sudut roll menggunakan OKF regular ketika sensor roll mengalami kegagalan .....	8
Gambar 2.2 Hasil estimasi sudut roll menggunakan OKF rekonfigurasi ketika sensor roll mengalami kegagalan .....	9
Gambar 2.3 Konfigurasi ulang skema kegagalan .....	11
Gambar 2.4 Hasil Simulasi konfigurasi ulang kontroler.....	11
Gambar 2.5 <i>Inertial Frame</i> dan <i>Body Frame</i> dari Quadcopter.....	16
Gambar 2.6 Struktur GPS .....	27
Gambar 2.7 Struktur observer dalam sistem umpan balik .....	28
Gambar 3.1 Letak dan output dari blok sensor .....	38
Gambar 3.2 Fungsi dan letak DAB dan EC dalam sistem .....	39
Gambar 3.3 Blok diagram PKR .....	41
Gambar 3.4 Variasi kegagalan sensor (a) IMU sehat dan GPS-receiver gagal (b) Gyro sehat, accelero dan GPS-receiver gagal (c) Accelero sehat, gyro dan GPS-receiver gagal (d) GPS-receiver sehat dan IMU gagal .....	42
Gambar 3.5 Struktur blok observer pada sistem .....	45
Gambar 3.6 Diagram blok toleransi kegagalan sistem pengendalian quadcopter .....	45
Gambar 4.1 Blok diagram observer pada peran sensor IMU .....	53
Gambar 4.2 Blok diagram observer pada peran sensor gyro .....	58
Gambar 4.3 Blok diagram observer pada peran sensor accelero .....	64
Gambar 5.1 Blok diagram observer pada peran GPS-receiver .....	71
Gambar 6.1 Respon sudut euler untuk IMU sempurna atau sensor gyro.....	75
Gambar 6.2 Hasil perhitungan state rotor .....	75
Gambar 6.3 Respons sudut Euler untuk sensor accelero .....	76
Gambar 6.4 Hasil perhitungan state rotor .....	77
Gambar 6.5 Respons sudut Euler quadcopter ketika GPS-receiver .....	78
Gambar 6.6 Hasil perhitungan state rotor .....	79

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Notasi untuk representasi Jordan .....	20
Tabel 3.1. Variasi kegagalan sensor .....	42
Tabel 6.1 Parameter simulasi quadcopter .....	73
Tabel 6.2 Parameter uji simulasi IMU sempurna dan sensor gyro .....	74
Tabel 6.3 Parameter uji simulasi sensor accelero .....	76
Tabel 6.4 Parameter uji simulasi GPS-receiver .....	78

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



# **BAB 1**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Keterkendalian dan keteramatan adalah dua aspek penting dalam sistem otonom seperti quadcopter. Ada banyak metode yang ditetapkan untuk menganalisis dua kriteria desain ini. Analisis keterkendalian dan keteramatan untuk sistem linier adalah area yang telah lama dikembangkan dan menjadi bahan standar dalam banyak buku teks sistem linear klasik seperti [1]. Analisis keterkendalian dari sistem nonlinear diperkenalkan pada [2] dan dikembangkan lebih lanjut dalam [3] dengan memasukkan keteramatan menjadi bagian dalam pertimbangan analisis. Analisis keterkendalian dan keteramatan untuk sistem kaskade dapat ditemukan di [4, 5, 6, 7, 8], termasuk di dalamnya memuat kondisi untuk ketidakteramatan sistem kaskade. Analisis ini dikembangkan lebih lanjut untuk desain kendali umpan balik.

Namun, sebagai sistem otonom, quadcopter sangat bergantung pada kesehatan komponennya. Dalam kondisi sempurna, yaitu ketika semua komponen quadcopter berfungsi dengan benar, quadcopter dapat diamati dan dapat dikendalikan karena telah dipastikan selama proses desain. Ketika beberapa komponen gagal, quadcopter yang tidak sempurna dapat dengan mudah menjadi tidak dapat diamati atau tidak dapat dikendalikan. Pengaruh kegagalan komponen terhadap keterkendalian dan keteramatan quadcopter yang menarik untuk dipelajari adalah kegagalan rotor atau kegagalan sensor, sementara kegagalan kontroler terlalu jelas untuk dianalisis maka bukan merupakan topik penelitian yang menarik. Masalah yang menarik para peneliti untuk mempelajari quadcopter yang tidak sempurna biasanya adalah ketika rotor mengalami kegagalan, seperti Lanzon dkk. [9, 10], Du dkk. [11], Saied dkk. [12, 13], Mueller dan Raffaello [14]. Mereka mengusulkan banyak cara mempertahankan pengendalian quadcopter ketika mengalami kegagalan rotor.

Sebaliknya, quadcopter yang mengalami kegagalan sensor tidak mendapat banyak perhatian dari para peneliti. Sensor pada quadcopter berfungsi sebagai pengamat state untuk mengetahui kondisi internal atau sistem internal [10]. Ada

beberapa sensor di quadcopter, di masing-masing rotor dan di badan quadcopter. Karena quadcopter memiliki empat rotor, maka diperlukan empat sensor rotor, satu untuk setiap rotor, sedangkan badan utama quadcopter itu sendiri umumnya dilengkapi dengan satu IMU dan satu GPS-receiver [15]. Kegagalan sensor lebih rumit karena tidak hanya mempengaruhi keteramatan tetapi juga keterkendalian loop tertutup dari quadcopter. Tidak adanya informasi dari state-state quadcopter yang seharusnya disediakan oleh sensor akan membuat tidak mungkin bagi kontroler untuk menentukan tindakan kontroler yang diperlukan untuk mempertahankan atau mengubah state-state quadcopter sesuai yang diinginkan. Seperti pembahasan pada [16] tentang keterkendalian loop tertutup.

Studi teoritis penjagaan keteramatan pada sistem dinamis di bawah kegagalan sensor secara menyeluruh diberikan dalam [17]. Sensor diklasifikasikan sebagai sensor kritis dan non-kritis, dengan kesalahan sensor kritis menyebabkan hilangnya keteramatan sistem dinamis yang diberikan. Analisis keteramatan sistem yang dapat diamati sebagian diberikan pada [18]. Sedangkan pada [19, 20, 21] Peran sensor berlebihan dimanfaatkan dalam mendesain sistem kontroler, yaitu sistem dilengkapi dengan tiga sensor yang independen satu sama lain. Kebutuhan untuk konfigurasi ulang algoritma kontroler karena kegagalan sensor dalam UAV diusulkan dalam [22], sementara di [23] alokasi sensor dinamis diusulkan. Metode yang diusulkan termasuk penggunaan matriks pseudoinverse [24, 25, 26, 27], untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks yang melibatkan matriks singular. Sedangkan metode kontroler bobot pseudoinverse diberikan dalam [11], metode tersebut digunakan untuk mengalokasikan input kontroler ke setiap rotor. Metode ini akan digunakan untuk menemukan cara menjaga keteramatan dan keterkendalian loop tertutup dari quadcopter yang mengalami kegagalan sensor. Mempertimbangkan lingkungan penerbangan quadcopter tidak pasti, masalah ini menjadi penting dan menarik. Studi teoritis keterkendalian ketika quadcopter dalam kondisi informasi yang tidak sempurna atau keteramatan sebagian dari quadcopter adalah suatu keharusan. Masalah ini menjadi semakin menantang ketika masing-masing dinamika rotor quadcopter juga dipertimbangkan, berbeda dengan asumsi umum bahwa dinamika rotor diabaikan.

Dalam studi ini, diasumsikan bahwa semua sensor rotor telah gagal, maka quadcopter bergantung pada IMU dan GPS-receiver. Dalam kondisi ini, informasi tentang state badan quadcopter yang disediakan oleh IMU / GPS harus digunakan untuk menentukan state rotor. Oleh karena itu, pendekatan yang diambil dalam penelitian ini adalah dengan menganalisis keteramatan dan keterkendalian loop tertutup quadcopter yang mengalami beberapa jenis kegagalan sensor dengan memasukkan dinamika rotor quadcopter ke dalam pertimbangan. Bersama dengan dinamika badan quadcopter, kedua dinamika tersebut membentuk model kaskade untuk dinamika quadcopter yang kemudian dapat dikombinasikan untuk menciptakan dinamika quadcopter yang diaugmentasi. Model augmentasi ini akan digunakan sebagai dasar untuk analisis. Ketetapan keteramatan dan keteramatan loop tertutup dari rotor ditunjukkan untuk beberapa jenis kegagalan sensor, demikian juga kontroler loop tertutup mereka. Diasumsikan bahwa sensor memberikan pengukuran yang bebas noise, maka hanya analisis deterministik yang diperlukan.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan yang dibahas adalah menganalisis keterkendalian dan keteramatan dari sistem augmentasi quadcopter berdasarkan informasi yang tidak sempurna atau terjadinya kegagalan sensor.

## **1.3 Tujuan**

Tujuan dari tesis ini adalah mendapatkan kondisi keterkendalian dan keteramatan dari sistem augmentasi quadcopter berdasarkan informasi yang tidak sempurna.

## **1.4 Batasan Masalah**

Beberapa batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut

- Tipe UAV adalah rotary-wing dengan empat aktuator, quadcopter
- Quadcopter berada dalam kondisi hover
- Komponen yang gagal adalah sensor

- Sensor yang digunakan adalah IMU dan GPS-receiver dan tidak terdapat noise
- Kegagalan terdeteksi dan terdiagnosis secara sempurna
- Frekuensi GPS adalah sama dengan Frekuensi IMU

## 1.5 Kontribusi

Dalam usulan Tesis ini yang menjadi kontribusi adalah menganalisis dan mendapatkan kondisi keteramatan dan keterkendalian loop tertutup dari sistem quadcopter yang memasukkan dinamika rotor ke dalam dinamika sistem, serta algoritma untuk mengestimasi state-state badan quadcopter yang tersedia begitu juga untuk state-state dari rotor.

## 1.6 Metodologi Penelitian

Metodologi yang akan digunakan dalam pengerjaan Tesis ini sebagai berikut

### 1. Studi Literatur

Hal – hal yang akan dipelajari untuk mendukung pengerjaan Tesis adalah keterkendalian dan keteramatan suatu sistem nonlinear yang terhubung secara riam, invers dari matriks singular dan nonsingular, teori kontroler.

### 2. Pemodelan Sistem

Pemodelan dilakukan dengan menggunakan pendekatan hukum kirchoff untuk dinamika rotor serta Newton-Euler untuk menurunkan dinamika dari quadcopter, baik dinamika translasi maupun rotasi.

### 3. Analisis Sistem

Analisis sistem yang dilakukan pada analisis keteramatan dan keterkendalian loop tertutup, dari quadcopter yang mengalami kegagalan sensor, serta mengestimasi state-state dari badan dari rotor quadcopter.

### 4. Simulasi

Simulasi dilakukan untuk memvalidasi analisis dan algoritma yang dihasilkan.

5. Penulisan dan Penyusunan Buku Tesis

Penyusunan buku Tesis yang terdiri dari pendahuluan, kajian pustaka, teori penunjang, struktur sistem, analisis dan estimasi, perancangan kontroler dan simulasi, serta penutup

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Kajian Penelitian Terkait

Subbab ini dimuat kajian penelitian tentang hasil penelitian-penelitian sebelumnya terkait dengan kegagalan komponen, skema kendali toleransi kegagalan, keteramatan serta keterkendalian.

##### 2.1.1 Reconfigurable Control of An UAV Against Sensor/Actuator Failures [22]

Sistem kendali penerbangan yang toleran terhadap kegagalan sensor/aktuator untuk kendaraan udara tak berawak (UAV) diusulkan. Dalam kasus kegagalan sensor, sensor yang salah diisolasi, dan filter Kalman (KF) yang mengabaikan umpan balik dari sensor yang salah, dibangun. Jika kegagalan merupakan kegagalan aktuator, isolasi dan identifikasi kegagalan aktuator dilakukan. Untuk tujuan ini kerugian parsial dan kegagalan yang terjadi di aktuator diisolasi dan diidentifikasi oleh KF dua tahap. Parameter pengontrol umpan balik disetel oleh prosedur rekonfigurasi (konfigurasi ulang) kontroler. Dalam simulasi, dinamika longitudinal dan lateral model UAV dipertimbangkan, dan kontroler penerbangan yang dapat dikonfigurasi ulang terhadap kegagalan sensor/aktuator diimplementasikan.

Ketika sensor mengalami kegagalan, pendekatan Optimum Kalman Filter (OKF) digunakan untuk mengakomodasi kesalahan. Untuk kasus ini, pengukuran yang salah diabaikan yang mana penting untuk mengonfigurasi algoritma filter karena perubahan yang terjadi karena kegagalan sensor tersebut. Asumsikan bahwa kanal pengukuran ke  $i$  mengalami kegagalan. Sehingga kanal pengukuran ke- $i$  diabaikan dan algoritma filter dikonfigurasi seperti berikut

Vektor pengukuran oleh UAV diberikan oleh

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.1)$$

Dengan adanya kegagalan tersebut dikonfigurasi menjadi sebagai berikut

$$\mathbf{y}_k^{rec} = \mathbf{H}_k^{rec} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^{rec} \quad (2.2)$$

dengan

$$\mathbf{y}_k^{rec} = [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(i-1), y_k(i+1), \dots, y_k(s-2), y_k(s-1)]^T \quad (2.3)$$

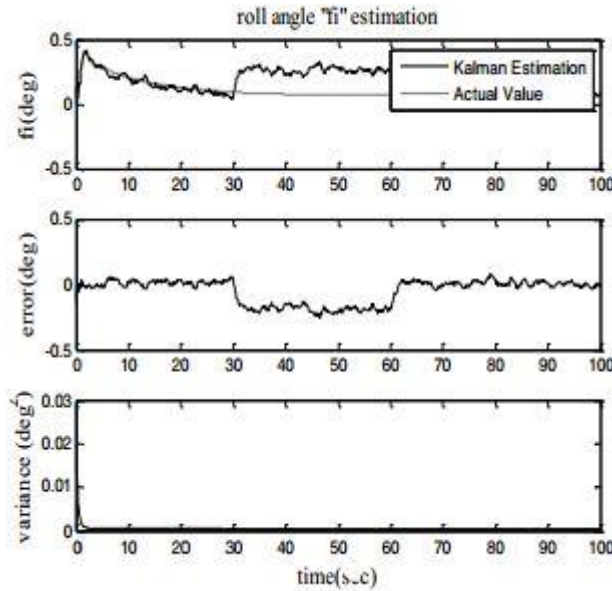
adalah vektor pengukuran konfigurasi ulang dimensi  $(s-1)$ ,  $\mathbf{v}_k^{rec}$  adalah vektor noise rekonfigurasi dimensi  $(s-1)$ .  $\mathbf{H}_k^{rec}$  adalah vektor noise rekonfigurasi dimensi  $(s-1) \times n$ . Elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_k^{rec}(j, j), j = \overline{1, s-1}$  bisa ditentukan sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k^{rec}(j, j) &= 1, \forall j < i \\ \mathbf{H}_k^{rec}(j, j) &= 1, \forall j \geq i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sedangkan elemen-elemen selain dari (2.4) adalah sama dengan nol. Kovarians noise matriks yang telah dikonfigurasi diberikan oleh

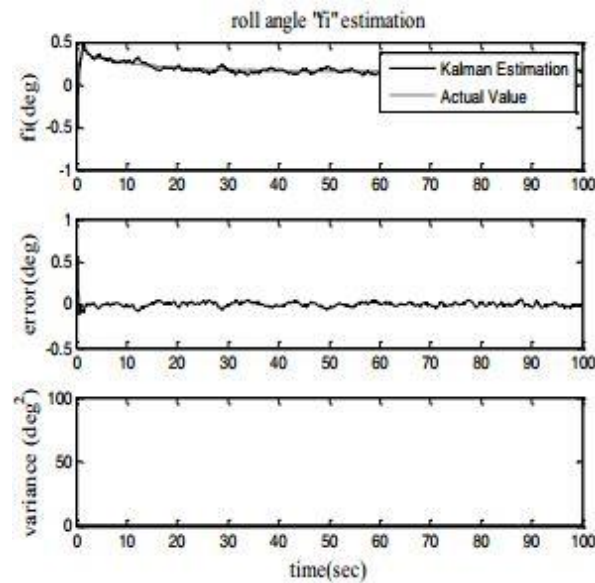
$$E[\mathbf{v}_k^{rec}(\mathbf{v}_k^{rec})^T] = \mathbf{R}_k^{rec} \delta_{kj} \quad (2.5)$$

Pada konfigurasi ulang KF, parameter yang digunakan adalah  $\mathbf{y}_k^{rec}$ ,  $\mathbf{H}_k^{rec}$  dan  $\mathbf{R}_k^{rec}$ . Hasil dari OKF reguler dan OKF konfigurasi ulang diberikan oleh Gambar 2.1 dan Gambar 2.2



Gambar 2.1 Hasil estimasi sudut roll menggunakan OKF reguler ketika sensor roll mengalami kegagalan





Gambar 2.2 Hasil estimasi sudut roll menggunakan OKF rekonfigurasi ketika sensor roll mengalami kegagalan

Seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2, OKF rekonfigurasi memberikan estimasi yang lebih unggul dari OKF regular, walaupun terdapat kegagalan pada pengukuran sudut roll.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode yang diajukan mampu mengatasi kegagalan pengukuran pada state tertentu, kegagalan ini dengan asumsi bahwa sensor masih berfungsi dan mengukur state tersebut ditambah dengan kegagalan, sedangkan kegagalan sensor sepenuhnya belum dipertimbangkan pada penelitian ini.

### 2.1.2 Dynamic Sensor Allocation Framework for Fault Tolerant Flight Control [23]

Makalah ini mengusulkan metode baru untuk alokasi sensor berdasarkan kontroler kegagalan toleran. Toleransi kegagalan dicapai dengan mengombinasikan secara optimal sumber sensor yang sehat dengan tetap mempertahankan *baseline* dari kontroler. Pendekatan yang diusulkan termasuk ke dalam kerangka kontroler toleran kegagalan hierarkis, dengan kegagalan sensor tertentu ditangani oleh alokasi tingkat yang lebih rendah sementara kegagalan yang lebih parah ditangani oleh konfigurasi ulang kontroler, dengan unit supervisor yang menentukan di awal level konfigurasi sebuah kegagalan.

Sistem yang dikendalikan dalam LTI dengan transfer fungsi dinotasikan sebagai  $P(s)$ , dengan input  $u$  dan hasil pengukuran output  $\mathbf{y}$ . Yang mana hasil pengukuran tersebut dipecah menjadi dua bagian  $\mathbf{y}_K$  dan  $\mathbf{y}_R$ ,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_K \\ \mathbf{y}_R \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dan diukur oleh sensor LTI dinotasikan oleh  $S_K(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  dan  $S_R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Aktuator sistem adalah LTI,  $S_A(s)$  dan  $K(s)$  merupakan kontroler yang dirancang sehingga sistem augmentasi

$$\bar{P}(s) = S_K(s)P(s)S_A(s) \quad (2.7)$$

adalah stabil dan memenuhi performa yang diinginkan. Sensor  $S_K(s)$  adalah sensor utama yang digunakan oleh sistem, dan  $S_R(s)$  digunakan sebagai pengganti  $S_K(s)$  ketika mengalami kegagalan. Hubungan dari hasil kedua sensor tersebut diberikan oleh persamaan berikut

$$\mathbf{y}_K = \mathbf{U}\mathbf{y}_R \quad (2.8)$$

dengan  $\mathbf{U}$  adalah matriks yang cocok dan memetakan  $\mathbf{y}_R$  terhadap  $\mathbf{y}_K$ . Jika  $S_K(s)\mathbf{y}_K$  dan  $S_R(s)\mathbf{y}_R$  dinotasikan oleh  $\mathbf{y}_K^m$  dan  $\mathbf{y}_R^m$  dan  $S_K(s)$  mempunyai inverse yang stabil, maka persamaan pengukuran bisa dirumuskan sebagai

$$\mathbf{y}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_K^m \\ \mathbf{y}_R^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ S_R(s) \mathbf{U} S_K(s)^{-1} \end{bmatrix} S_K(s) \mathbf{y}_K \quad (2.9)$$

Ketika sensor  $S_K(s)$  sehat, hasil pengukuran ini diproyeksikan sebagai input untuk  $K(s)$  melalui matriks  $\mathbf{V} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$ , ( $\mathbf{y}_K^m = \mathbf{V}\mathbf{y}^m$ ). Realokasi sensor yang diajukan oleh makalah adalah tanpa mengubah baseline dari kontroler, yang mana ini bisa dicapai jika  $\mathbf{V}$  diganti dengan  $\mathbf{V} + \bar{\mathbf{E}}(s)$ , dengan

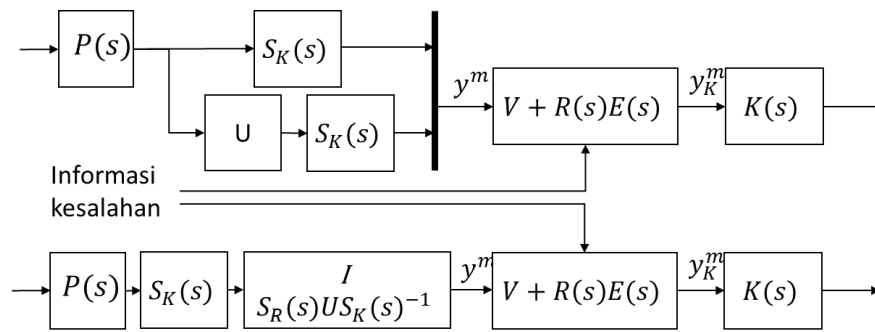
$$\bar{\mathbf{E}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ S_R(s) \mathbf{U} S_K(s)^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Persamaan ini bisa diterapkan ketika sensor yang rusak diketahui kemudian diisolasi sehingga hasil pengukuran yang digunakan berganti pada hasil dari  $S_R(s)$ . Tugas ini bisa diterapkan dengan memilih  $R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  sehingga menyadari bahwa sensor yang gagal mengirimkan sinyal 0. Rekonfigurasi skema dari sistem secara keseluruhan diberikan oleh Gambar 2.3. Hasil dari simulasi diberikan oleh Gambar 2.4 Simulasi dilakukan dengan tiga tahap: yang pertama adalah ketika tidak

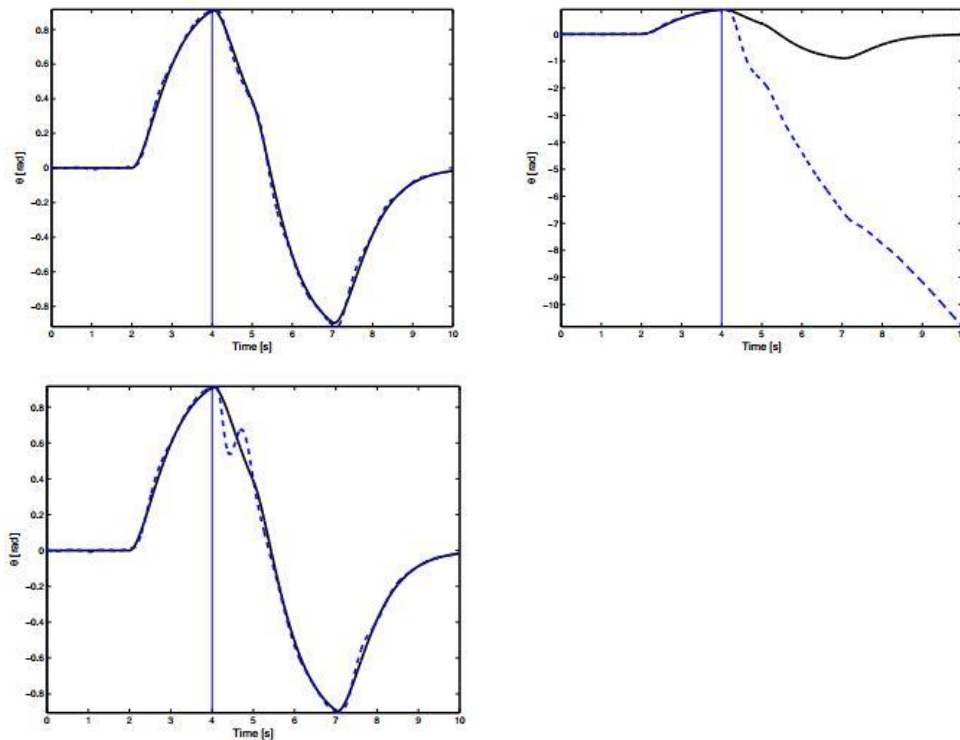
ada kegagalan sensor yang terjadi. Dalam kasus kedua adalah ketika sensor mengalami kegagalan dan tidak ada konfigurasi ulang sensor yang digunakan.

$$V + \bar{E}(s) = V + V + R(s)E(s) \quad (2.11)$$

Sedangkan simulasi ketiga adalah ketika sensor mengalami kegagalan dan prosedur akomodasi kegagalan yang diusulkan aktif. Walaupun terdapat waktu perpindahan, simulasi yang ketiga menunjukkan bahwa performa dari informasi sensor hampir sama dengan kasus pertama, artinya bahwa kegagalan yang terjadi pada sensor tidak berpengaruh pada performa dari kontroler.



Gambar 2.3 Konfigurasi ulang skema kegagalan



Gambar 2.4 Hasil Simulasi konfigurasi ulang kontroler

### 2.1.3 Use of Observers for The Inversion of Nonlinear Maps [28]

Pada naskah ini, ada tiga permasalahan *map inversion* yang berhasil didefinisikan, dengan penyelesaian untuk dua permasalahan tersebut adalah melalui desain observer.

Untuk mendefinisikan ketiga permasalahan tersebut, diperkenalkan terlebih dulu *direct map* yaitu hubungan antara vektor state,  $\mathbf{x}$ , dan vektor output,  $\mathbf{y}$ , seperti berikut

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

*Direct map* juga bisa digunakan untuk mendapatkan hubungan antara vektor  $\mathbf{x}$  dan turunannya sampai dengan order ke  $i$ . Dengan vektor  $\mathbf{y}$  dan turunannya juga sampai dengan order ke  $i$ . Didapatkan hubungannya sebagai berikut

$$\mathbf{y}_{e,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ J(\mathbf{x})\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{f}_0 \\ J(\mathbf{x})\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ J(\mathbf{x})\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{f}_{i-1} \end{bmatrix} := \mathbf{h}_{e,i}(\mathbf{x}_{e,i}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{h}(\mathbf{x})/dt \\ d^2\mathbf{h}(\mathbf{x})/dt^2 \\ \vdots \\ d^i\mathbf{h}(\mathbf{x})/dt^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

dengan

$$\mathbf{y}_{e,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(0)T} \\ \mathbf{y}^{(1)T} \\ \mathbf{y}^{(2)T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(i)T} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x}_{e,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)T} \\ \mathbf{x}^{(1)T} \\ \mathbf{x}^{(2)T} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(i)T} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Persamaan ini disebut *extended map of order i*, matriks jakobi dari persamaan ini diberikan oleh

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{x}_e) = \begin{pmatrix} J(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ * & J(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & J(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Berikut pendefinisian tiga permasalahan tersebut

**Permasalahan 1:** (*inversion of extended map*). Diberikan sebuah *reference extended output*,  $\mathbf{y}_{e,r}(t)$ ,  $\mathbf{y}_{e,r} \in C([0, \infty), \mathcal{B}_c)$ , temukan *inverse reference extended state*,  $\mathbf{x}_{e,r}(t)$ ,  $\mathbf{x}_{e,r} \in C([0, \infty), \mathcal{A}_c)$ , sehingga

$$\mathbf{y}_{e,r}(t) = \mathbf{h}_e(\mathbf{x}_{e,r}(t)). \forall t \in [0, \infty) \quad (2.16)$$

**Permasalahan 2:** (*asymptotic inversion of extended map*). Diberikan sebuah *reference extended output*,  $\mathbf{y}_{e,r}(t)$ ,  $\mathbf{y}_{e,r} \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{B}_c)$ , dengan  $\tilde{\varepsilon}$  adalah konstanta positif, temukan *asymptotic inverse reference extended state*,  $\hat{\mathbf{x}}_{e,r}(t), \hat{\mathbf{x}}_{e,r} \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{A}_c)$ , sehingga sehingga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{y}}_{e,r}(t)\| = 0 \quad (2.17)$$

dengan  $\tilde{\mathbf{y}}_{e,r}(t) := \mathbf{y}_{e,r}(t) - \hat{\mathbf{y}}_{e,r}(t)$  dan  $\hat{\mathbf{y}}_{e,r} := \mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}_{e,r})$

**Permasalahan 3:** (*practical inversion of extended map*). Diberikan sebuah *reference extended output*,  $\mathbf{y}_{e,r}(t)$ ,  $\mathbf{y}_{e,r} \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{B}_c)$ , dengan  $\tilde{\varepsilon}$  adalah konstanta positif, temukan *one-parameter family* dari *practical inversion* dari *extended state*,  $\{\hat{\mathbf{x}}_{v,e,r}(t)\}_{v>0}, \hat{\mathbf{x}}_{v,e,r}(t) \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{A}_c), \forall v > 0$ , sehingga,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ , tergantung pada  $\varepsilon$ , membuat  $v = \eta$ , didapatkan

$$\|\tilde{\mathbf{y}}_{\eta,e,r}(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_\varepsilon \quad (2.18)$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{\eta,e,r}(t) &:= \mathbf{y}_{e,r}(t) - \hat{\mathbf{y}}_{\eta,e,r}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}_{\eta,e,r} &:= \mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}_{\eta,e,r}) \\ t_\varepsilon &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Prosedur penyelesaian dari permasalahan-permasalahan tersebut diberikan sebagai berikut

Solusi dari permasalahan 1 didapatkan dari menyelesaikan persamaan *time-varying* berikut

$$\dot{\mathbf{x}}_{e,r} = \Phi_e(\mathbf{x}_{e,r}, t) \quad (2.20)$$

diinisialisasi pada  $\mathbf{x}_{e,r}(0) = \mathbf{h}_e^{-1}(\mathbf{y}_{e,r}(0))$ , dengan

$$\Phi_e(\xi_{e,r}, t) := \begin{bmatrix} J(\xi_{e,0})^{-1}(\mathbf{y}_r^{(1)} - \mathbf{f}_0(\xi_{e,0})) \\ \vdots \\ J(\xi_{e,0})^{-1}(\mathbf{y}_r^{(m)} - \mathbf{f}_{m-1}(\xi_{e,m-1})) \\ J(\xi_{e,0})^{-1}(\mathbf{y}_r^{(m+1)} - \mathbf{f}_m(\xi_{e,m})) \end{bmatrix} = J(\xi_{e,0})^{-1} \dot{\mathbf{y}}_{e,r}(t) \quad (2.21)$$

Solusi dari persamaan permasalahan 2 dan 3 bisa didapatkan dengan mengamati vektor state dari nonlinear sistem yang diberikan menggunakan pengukuran  $\mathbf{y}_{e,r} = \mathbf{h}_e(\mathbf{x}_{e,r})$  sehingga

Error estimasi dari vektor state menuju ke nol seiring waktu meningkat, pada permasalahan 2

Error estimasi dari vektor state menuju bisa dibuat kecil, setelah waktu instan tertentu, pada permasalahan 3

Solusi dari kedua permasalahan ini bisa dipandang sebagai observer memiliki struktur sebagai berikut

$$\mu \dot{\hat{x}}_{\mu,e,r} = K_e(\hat{x}_{\mu,e,r}) (y_{e,r} - h_e(\hat{x}_{\mu,e,r})) \quad (2.22)$$

dengan  $\mu > 0$ , dinamika dari error  $\tilde{y}_{\eta,e,r} = h_e(x_{e,r}) - h_e(\hat{x}_{\mu,e,r})$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mu \dot{\tilde{y}}_{\mu,e,r} = & -J_e(\hat{x}_{\mu,e,r}) K_e(\hat{x}_{\mu,e,r}) \tilde{y}_{\eta,e,r} + (y_{e,r} - h_e(\hat{x}_{\mu,e,r})) \\ & + \mu J_e(x_{e,r}) \phi_e(x_{e,r}, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

## 2.2 Teori Dasar

Subbab ini dimuat dasar teori terkait sistem yang diteliti, umpan balik, keterkendalian dan keteramatan, observer dan sensor.

### 2.2.1 *Brushless DC (BLDC) Motor* [29]

Motor BLDC merupakan jenis motor dari hasil pengembangan motor DC yang menggunakan sikat komutator. Dibandingkan dengan motor DC, BLDC memiliki kelebihan yaitu efisiensi tinggi, umur yang relatif panjang, konsumsi energi lebih rendah, perawatan lebih mudah dan tidak menimbulkan noise elektrik

Seperti halnya motor pada umumnya, konstruksi motor BLDC terdiri dari dua bagian utama yaitu stator dan rotor. Konstruksi dasar sebuah stator yang memiliki kumparan tiga fasa, jumlah kumparan dibuat untuk memiliki riak torsi yang lebih kecil. Pada setiap kumparan stator masing-masing memiliki tiga unsur yang terhubung seri Gambar 2.14, yaitu induktansi (L), resistansi (R), dan gaya gerak listrik kembali (*back emf*). Menunjukkan konfigurasi kumparan stator.

Pada bagian rotor, terdiri atas susunan magnet permanen. Jika dibandingkan dengan motor DC komutator, rotor BLDCM lebih ringan karena tidak terdapat kumparan seperti pada motor DC komutator. Gambar 2.3 menunjukkan kumparan stator dan rotor BLDCM

Persamaan matematis tegangan BLDCM untuk masing-masing fasa U-V-W diberikan pada Persamaan

$$\begin{bmatrix} u_U \\ u_V \\ u_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_U \\ e_V \\ e_W \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

dengan

$u_U, u_V, u_W$  : tegangan kumparan stator setiap fasa

$i_U, i_V, i_W$  : arus kumparan stator setiap fasa

$e_U, e_V, e_W$  : *back EMF* Setiap fasa

$R$  : resistansi motor

$L$  : induktansi motor

$M$  : mutual induktansi ketiga kumparan

Torsi motor BLDC yang dihasilkan oleh ketiga fasa diberikan oleh persamaan

$$T_e = \frac{1}{\omega} (e_U \cdot i_U + e_V \cdot i_V + e_W \cdot i_W) \quad (2.25)$$

Putaran yang dihasilkan oleh motor BLDC diberikan pada Persamaan

$$T_e - T_L - B\omega = J(d\omega/dt) \quad (2.26)$$

dengan,

$T_e$  : torsi motor

$T_L$  : torsi beban

$B$  : Koefisien damping

$\omega$  : kecepatan angular motor

$J$  : momen inersia motor

Karena cepatnya rangkaian elektro motor pada pengaturan torsi, dinamika BLDC tersebut dapat identifikasi menggunakan pendekatan orde satu, yaitu

$$\omega = \frac{K}{T_e s + 1} T_r \rightarrow \omega s T_e + \omega = K T_r \quad (2.27)$$

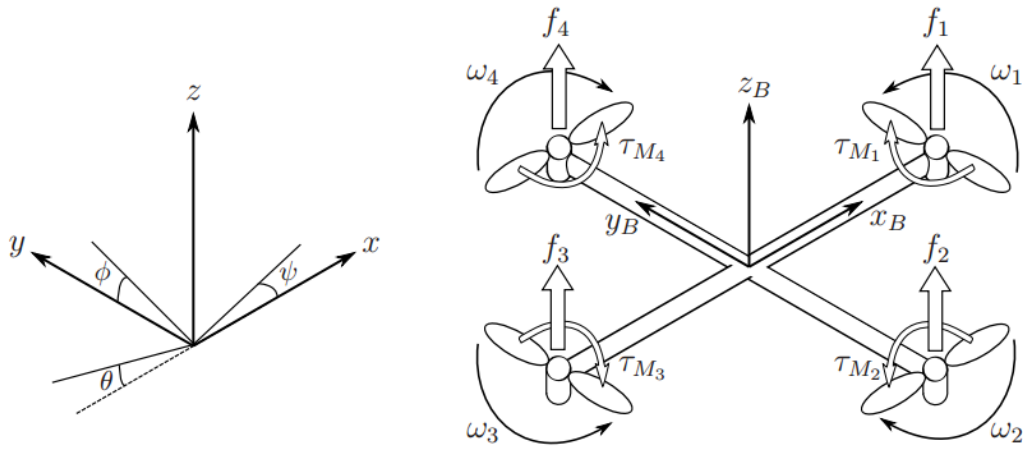
Sehingga didapatkan dinamika sistem dari BLDC sebagai berikut

$$\dot{\omega} = -\frac{\omega_m}{T} + \frac{K}{T} T_r \quad (2.28)$$

dengan,

$T_r$  : Torsi reference

### 2.2.2 Model Dinamika Quadcopter [15]



Gambar 2.5 *Inertial Frame* dan *Body Frame* dari Quadcopter

Struktur dari quadcopter dipresentasikan oleh gambar 2.4, termasuk kecepatan sudutnya, torsi dan gaya yang diakibatkan oleh 4 rotornya. Posisi linear absolut dari quadcopter didefinisikan pada *inertial frame*, notasikan sebagai  $R^i$ , oleh  $\xi$ , *attitude*. Posisi angular di definisikan pada *inertial frame* dengan tiga sudut Euler,  $\eta$ . Sudut Pitch  $\theta$  menentukan rotasi quadcopter di sekitar sumbu-y, Sudut roll,  $\phi$  menentukan rotasi quadcopter di sekitar sumbu-x, dan Sudut yaw  $\psi$  disekitar sumbu-z.

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Origin pada *body frame* adalah pusat massa dari quadcopter. Pada *body frame*, kecepatan linear ditentukan oleh  $V_B$  dan kecepatan sudut oleh  $v$

$$V_B = \begin{bmatrix} V_{x,B} \\ V_{y,B} \\ V_{z,B} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Matriks rotasi dari *body frame* ke *inertial frame* diberikan oleh

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

dengan  $S_x = \sin x$  dan  $C_x = \cos x$ . Matrik rotasi  $R$  adalah orthogonal sehingga  $R^{-1} = R^T$  yang mana adalah matrik rotasi dari *inertial frame* ke *body frame*.



Quadcopter diasumsikan mempunyai struktur yang simetris dengan empat lengan sejajar dengan sumbu-x dan sumbu-y. Oleh karena itu, matriks inersia adalah matriks diagonal dengan  $I_x = I_y$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Kecepatan sudut rotor  $i$ , dinotasikan sebagai  $\omega_i$ , menghasilkan gaya  $f_i$ . Kecepatan sudut dan percepatan rotor juga menghasilkan torsi  $\tau_{Mi}$  disekitar sumbu rotor

$$f_i = K_d \omega_i^2, \tau_{Mi} = b \omega_i^2 + I_M \dot{\omega} \quad (2.33)$$

dengan  $K_d$  adalah konstanta angkat atau dorong dan  $b$  adalah konstanta *drag*, inersia rotor adalah  $I_M$ . Biasanya efek dari  $\dot{\omega}$  sangat kecil sehingga diabaikan.

Kombinasi gaya dari rotor menghasilkan dorongan  $T$  pada arah sumbu-z pada *body frame*. Torsi  $\tau_B$  terdiri dari  $\tau_\psi, \tau_\theta$  dan  $\tau_\phi$

$$T = \sum_{i=1}^4 (-1)^{-i} f_i = K_d \sum_{i=1}^4 (-1)^{-i} \omega_i^2, \quad T^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\tau_B = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l K_d (-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ l K_d (-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 \tau_{Mi} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

dengan  $l$  adalah jarak antara rotor dan pusat massa quadcopter. Gerakan roll didapatkan dengan mengurangi kecepatan rotor ke-2 dan menaikkan kecepatan rotor ke-4. Sama halnya, gerakan pitch didapatkan dengan mengurangi kecepatan rotor ke-1 dan menaikkan kecepatan rotor ke-3. Gerakan yaw didapatkan dengan meningkatkan kecepatan sudut kecepatan dari rotor yang berlawanan dan mengurangi kecepatan dua rotor yang lain.

Dengan mengasumsikan bahwa quadcopter adalah *rigid body*, persamaan Newton-Euler bisa digunakan untuk menggambarkan dinamikanya. Pada *body frame*, gaya yang dibutuhkan untuk percepatan massa  $m\dot{\mathbf{V}}_B$  dan gaya sentrifugal  $\mathbf{v} \times m\dot{\mathbf{V}}_B$  adalah sama dengan gravity  $\mathbf{R}^T \mathbf{G}$  dan trust total dari rotor-rotor  $\mathbf{T}_B$ .

$$m\dot{\mathbf{V}}_B + \mathbf{v} \times m\dot{\mathbf{V}}_B = \mathbf{R}^T \mathbf{G} + \mathbf{T}_B \quad (2.36)$$

Pada *inertial frame*, gaya sentrifugal dihilangkan. Sehingga, hanya gaya gravitasi dan arah dari dorong yang berpengaruh pada percepatan quadcopter.

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{G} + \mathbf{R}\mathbf{T}_B$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T}{m} \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Pada *body frame*, percepatan sudut dari inersia  $\mathbf{I}\dot{\mathbf{v}}$ , gaya sentripetal  $\mathbf{v} \times (\mathbf{I}\mathbf{v})$  dan *gyroscopic force*  $\boldsymbol{\Gamma}$  adalah sama dengan torsi luar  $\boldsymbol{\tau}$ .

$$\mathbf{I}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times (\mathbf{I}\mathbf{v}) + \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{I}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}p \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r \end{bmatrix} - I_r \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_\Gamma + \boldsymbol{\tau} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{yy} - I_{zz}) \frac{qr}{I_{xx}} \\ (I_{zz} - I_{xx}) \frac{pr}{I_{yy}} \\ (I_{zz} - I_{yy}) \frac{pq}{I_{zz}} \end{bmatrix} - I_r \begin{bmatrix} \frac{q}{I_{xx}} \\ -\frac{p}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} \omega_\Gamma + \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

dengan  $\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$ . Percepatan sudut pada *inertial frame* diambil dari percepatan di *body frame* dengan menggunakan matriks transformasi  $\mathbf{W}_\eta^{-1}$  dan turunannya

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{W}_\eta^{-1}\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{W}_\eta^{-1})\mathbf{v} + (\mathbf{W}_\eta^{-1})\dot{\mathbf{v}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}C_\phi T_\theta + \dot{\theta} \frac{S_\phi}{C_\theta^2} & \dot{\phi}C_\phi C_\theta + \dot{\theta} \frac{C_\phi}{C_\theta^2} \\ 0 & -\dot{\phi}S_\phi & -\dot{\phi}C_\phi \\ 0 & \dot{\phi} \frac{C_\phi}{C_\theta} + \dot{\theta} \frac{S_\phi T_\theta}{C_\theta} & \dot{\phi} \frac{S_\phi}{C_\theta} + \dot{\theta} \frac{C_\phi T_\theta}{C_\theta} \end{bmatrix} \mathbf{v} + (\mathbf{W}_\eta^{-1})\dot{\mathbf{v}} \quad (2.39)$$

### 2.2.3 Keterkendalian dan Keteramatan [1, 7]

Diberikan persamaan state *Linear Time-Invariant* (LTI) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

dengan  $p$  input,  $q$  output dan  $n$  state,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$  adalah matriks konstan dengan ukuran  $n \times n, n \times p, q \times n$  dan  $q \times p$ , secara berurutan.

Solusi dari persamaan LTI diberikan oleh

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.41)$$

Oleh karena itu persamaan pengukuran LTI dapat ditulis ulang menjadi

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.42)$$

Definisi keterkendalian: pasangan  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  disebut dapat dikendalikan (*controllable*) jika untuk setiap sembarang state awal  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  dan sembarang state akhir  $\mathbf{x}_1$ , terdapat sebuah input yang memindah  $\mathbf{x}_0$  ke  $\mathbf{x}_1$  pada waktu yang terbatas (*finite time*). Jika tidak,  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  disebut tidak dapat dikendalikan (*uncontrollable*).

Berdasarkan definisi di atas, ada beberapa cara yang digunakan untuk mengetahui bahwa persamaan LTI adalah dapat dikendalikan, di antaranya dengan menganalisa sistem tersebut dalam bentuk Jordan, yaitu

Asumsikan bahwa bentuk jordan dari (2.40) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} S: \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_b\mathbf{Q} \quad (2.44)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}_b \quad (2.45)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{Q} \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} \quad (2.47)$$

dengan  $\hat{\mathbf{A}}$  adalah dalam bentuk Jordan seperti yang diberikan pada Tabel 2.1 Notasi untuk representasi Jordan.  $\hat{\mathbf{A}}$  adalah matriks dengan bentuk kanonik Jordan dengan  $m(m \leq n)$  nilai eigen yang berbeda  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .  $\hat{\mathbf{A}}_i$  adalah Jordan blok yang berhubungan dengan  $\lambda_i$  dan  $r(i)$  adalah banyaknya blok Jordan di  $\hat{\mathbf{A}}_i$ .  $\hat{\mathbf{A}}_{ij}$  adalah blok Jordan ke  $j$  di  $\hat{\mathbf{A}}_i$ .  $\hat{\mathbf{B}}$  dan  $\hat{\mathbf{H}}$  adalah matriks yang berhubungan dengan  $\hat{\mathbf{A}}_i$  dan  $\hat{\mathbf{A}}_{ij}$ .  $\hat{h}_{1ij}$  dan  $\hat{h}_{lij}$  merupakan baris pertama dan terakhir dari  $\hat{\mathbf{B}}_{ij}$ .  $c_{1ij}$  dan  $\hat{c}_{lij}$

merupakan kolom pertama dan terakhir dari  $\hat{\mathbf{C}}_{ij}$ . Keterkendalian dan keteramatan dari (3.46) adalah bergantung pada  $\hat{b}_{lij}$   $\hat{h}_{lij}$ .

**Theorema 1.** Sistem (3.46) dapat dikendalikan jika hanya jika untuk setiap  $i = 1, \dots, m$  himpunan  $r(i)$  vektor baris berdimensi  $p$

$$\hat{b}_{li1} \quad \hat{b}_{li2} \quad \dots \quad \hat{b}_{lir(i)}$$

**Theorema 2.** Sistem (3.46) dapat dikendalikan jika hanya jika untuk setiap  $i = 1, \dots, m$  himpunan  $r(i)$  vektor kolom berdimensi  $q$

$$\hat{h}_{li1} \quad \hat{h}_{li2} \quad \dots \quad \hat{h}_{lir(i)}$$

Tabel 2.1 Notasi untuk representasi Jordan

$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \dots & \hat{\mathbf{A}}_m \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_m \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{\mathbf{H}}_1 \quad \hat{\mathbf{H}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{H}}_m]$	
$\hat{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{i1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{i2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \dots & \hat{\mathbf{A}}_{ir(i)} \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{i1} \\ \hat{\mathbf{B}}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_{ir(i)} \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{H}}_i = [\hat{\mathbf{H}}_{i1} \quad \hat{\mathbf{H}}_{i2} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{H}}_{ir(i)}]$	
$\hat{\mathbf{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & & & \lambda_i \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{B}}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{1ij} \\ \hat{b}_{2ij} \\ \vdots \\ \hat{b}_{lij} \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = [\hat{h}_{1ij} \quad \hat{h}_{2ij} \quad \dots \quad \hat{h}_{lij}]$	

Selain cara di atas, cara lain untuk mengetahui bahwa persamaan LTI adalah dapat dikendalikan, adalah dengan menganalisis solusi dari sistem tersebut, apakah terdapat nilai input yang sesuai, artinya bahwa input sistem terdefinisi. Persamaan input tersebut diberikan oleh

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}' e^{A'(t_1-t)} \mathbf{W}_c^{-1}(t_1) [e^{A(t_1)} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1] \quad (2.48)$$

dengan

$$\mathbf{W}_c(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{A'(\tau)} d\tau \quad (2.49)$$

$u(t)$  terdefinisi jika  $W_c(t)$  adalah nonsingular, sehingga dapat dinyatakan bahwa sistem dapat dikendalikan jika  $W_c(t)$  adalah nonsingular.

#### 2.2.4 Sistem kaskade [8]

Ketika terdapat dua sistem yang terhubung secara kaskade, representasi kedua sistem tersebut dapat direpresentasikan dalam satu bentuk augmentasi yang dibangun dari bentuk jordan dari masing-masing kedua sistem tersebut sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Hx\end{aligned}\tag{2.50}$$

dengan

$$x = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}\tag{2.51}$$

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{12} \end{bmatrix}\tag{2.52}$$

$$\hat{A}_{12} = \hat{B}_b \hat{H}_r\tag{2.53}$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\tag{2.54}$$

$$H = [\mathbf{0} \quad \hat{H}_2]\tag{2.55}$$

dan  $u = u_1$ . Asumsikan bahwa nilai eigen  $A_1$  dan  $A_1$  adalah berbeda,  $\lambda_{jA_1} - \lambda_{iA_2} \neq 0, \forall i, j$ , maka sistem tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk normal dengan mendefinisikan

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \gamma & I \end{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\gamma & I \end{bmatrix} x\end{aligned}\tag{2.56}$$

dengan  $-\gamma \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \gamma = -\hat{A}_{12}$ , yaitu

$$[\gamma_{ij}] = \hat{A}_{ij12} / \lambda_{jA_1} - \lambda_{iA_2}\tag{2.57}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u \\ y &= \hat{H} \hat{x}\end{aligned}\tag{2.58}$$

dengan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ -\gamma \hat{B}_1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\hat{H} = [\hat{H}_2 \gamma \quad \hat{H}_2] \quad (2.61)$$

### 2.2.5 State Feedback [24]

Sistem diberikan seperti pada (3.46). Diasumsikan bahwa setiap state dari system terukur, sehingga dapat dirancang sebuah aturan kontroler yang merupakan fungsi dari state dan referensi input.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.62)$$

Ambil misalkan umpan balik dibatasi linear, aturan kontroler bisa ditulis sebagai

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{k}_r \mathbf{r} \quad (2.63)$$

Sistem loop tertutup dari sistem diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{k}_r \mathbf{r} \quad (2.64)$$

Selanjutnya adalah menentukan gain K sehingga loop tertutup dari sistem memiliki karakteristik polinomial

$$p(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + p_n \quad (2.65)$$

### 2.2.6 Diferensial Vektor [24]

Diberikan  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  adalah *smooth scalar function*, dan  $\mathbf{x}$  adalah state sebanyak  $n$ , maka gradiennya  $\mathbf{h}$  terhadap  $\mathbf{x}$  dinotasikan sebagai

$$\nabla \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Diberikan  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  adalah ruang vektor di  $\mathbf{R}^n$ , gradiennya adalah

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Misal  $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  adalah *smooth scalar fuction* dan  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  adalah *smooth vector field* pada  $\mathbf{R}^n$ , maka *lie derivatif*  $\mathbf{h}$  terhadap  $\mathbf{f}$  didefinisikan sebagai

$$L_{\mathbf{f}} \mathbf{h} = \nabla \mathbf{h} \mathbf{f} \quad (2.68)$$

secara rekursif *lie derivatif* bisa didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}^0} \mathbf{h} &= \mathbf{h} \\ L_{\mathbf{f}^i} \mathbf{h} &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}^{i-1}} \mathbf{h}) = \nabla(L_{\mathbf{f}^{i-1}} \mathbf{h}) \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Misal  $\mathbf{g}$  adalah ruang vektor yang lain, maka fungsi skalar  $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$  adalah

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \mathbf{h} = \nabla(L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}) \mathbf{g} \quad (2.70)$$

Definisi *Lie Brackets*: misal  $\mathbf{f}$  dan  $\mathbf{g}$  adalah *vector field* pada  $R^n$ , maka *lie bracket* dari  $\mathbf{f}$  dan  $\mathbf{g}$  didefinisikan sebagai

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} \quad (2.71)$$

Bisa juga ditulis sebagai  $ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}$ . Secara rekursif dapat definisikan sebagai

$$\begin{aligned} ad_{\mathbf{f}^0} \mathbf{g} &= \mathbf{g} \\ ad_{\mathbf{f}^i} \mathbf{g} &= [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}^{i-1}} \mathbf{g}] \end{aligned} \quad (2.72)$$

### 2.2.7 Singular Value Decomposition [30] dan Pseudoinverse [26]

Definisikan  $\mathfrak{R}_r^{m \times n}$  sebagai matriks  $m \times n$  dengan basis  $r$

**Teorema 3:** misal  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_r^{m \times n}$  akan ada dua matriks ortogonal,  $\mathbf{U} \in \mathfrak{R}_r^{m \times m}$  dan  $\mathbf{V} \in \mathfrak{R}_r^{n \times n}$  Sehingga

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}' \quad (2.73)$$

dengan

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

dan  $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  dengan  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Elemen dari  $\mathbf{\Sigma}$  adalah nilai singular dari  $\mathbf{A}$  yaitu  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  dan  $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ . Kolom-kolom dari  $\mathbf{U}$  disebut vector singular kiri dan kolom-kolom dari  $\mathbf{V}$  disebut vektor singular kanan.

Dari teorema di atas, kita bias membuat SVD dari sebuah matriks, atau sebaliknya. Karena  $\mathbf{U}$  dan  $\mathbf{V}$  matriks ortogonal; dan  $\mathbf{\Sigma}$  adalah matriks diagonal, maka invers (atau pseudoinverse) dari sembarang matriks  $\mathbf{A}$  bisa didapatkan dengan:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}')^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}' \quad (2.75)$$

Simbol ‘+’ menandakan pseudoinverse. Dengan kata lain, persamaan tersebut memenuhi empat kriteria dari Moore-Penrose pseudoinverse

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ \quad (2.76)$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \quad (2.77)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)' = \mathbf{A}^+ \quad (2.78)$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})' = \mathbf{A}^+ \quad (2.79)$$

Pseudoinverse ini adalah unik, artinya bahwa untuk sembarang matriks  $\mathbf{A}$  akan hanya ada satu  $\mathbf{A}^+$

## 2.2.8 Inertial Measurement Unit (IMU) [31]

IMU adalah sensor yang mampu mengukur orientasi dari quadcopter menggunakan sensor inersia, yaitu sensor accelero dan sensor gyro. Cara kerja dari masing-masing sensor tersebut diberikan sebagai berikut

### 2.2.8.1 Sensor Accelero

Accelero sensor mengukur percepatan translasi sepanjang sumbu sensitifnya dengan menghitung pergerakan massa. Pengukuran tersebut diberikan oleh persamaan berikut

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad (2.80)$$

dengan  $\mathbf{f}$  adalah vektor gaya spesifik,  $\mathbf{a}$  vektor percepatan dan  $\mathbf{g}$  adalah vektor gravitasi. Percepatan  $\mathbf{a}$  dapat dinyatakan sebagai turunan dua kali dari vektor posisi  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{a} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.81)$$

sedangkan medan gravitasi pada koordinat inersia diberikan oleh persamaan berikut

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega}_{ie}\boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r} \quad (2.82)$$

dengan  $\boldsymbol{\Omega}_{ie}$  matriks skew-simetris yang menunjukkan rotasi bumi pada koordinat inersia. Sehingga dapat ditulis ulang menjadi

$$\mathbf{f} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i - \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega}_{ie}\boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r} \quad (2.83)$$

Secara umum, dengan mempertimbangkan eror pengukuran accelero. Hasil pengukuran accelero dapat dimodelkan dengan persamaan pengamatan sebagai berikut

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \mathbf{f}_b + \mathbf{b}_a + \mathbf{S}_1\mathbf{f} + \mathbf{S}_2\mathbf{f} + \mathbf{N}_a\mathbf{f} + \delta\mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (2.84)$$



dengan

$\tilde{\mathbf{f}}_b$  : vektor pengukuran accelero sensor ( $\text{m/s}^2$ )

$\mathbf{f}_b$  : vektor gaya spesifik sebenarnya ( $\text{m/s}^2$ )

$\mathbf{b}_a$  : vektor bias accelero sensor ( $\text{m/s}^2$ )

$\mathbf{S}_1$  : matriks eror faktor skala linear

$\mathbf{S}_2$  : matriks eror faktor skala nonlinear

$\mathbf{N}_a$  : matriks non-orthogonality triad accelero

$\delta \mathbf{g}$  : vektor gravitasi yang tidak lazim ( $\text{m/s}^2$ )

$\boldsymbol{\varepsilon}_a$  : vektor noise accelero ( $\text{m/s}^2$ )

Matriks  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$  dan  $\mathbf{N}_a$  diberikan oleh

$$\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{a,xy} & \theta_{a,xz} \\ \theta_{a,yx} & 1 & \theta_{a,yz} \\ \theta_{a,zx} & \theta_{a,zy} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} s_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{1,z} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} s_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{2,z} \end{bmatrix} \mathbf{g} \quad (2.87)$$

dengan  $\theta_{(,), (,)}$  adalah sudut yang menunjukkan misalignment antara sumbu accelero dan  $s_{(,), (,)}$  adalah faktor skala untuk ke tiga sumbu accelero.

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa sensor accelero adalah bebas eror baik sistematis maupun acak

#### 2.2.8.2 Sensor Gyro

Gyro sensor adalah perangkat untuk mengukur atau mempertahankan orientasi. Gyro sensor khususnya adalah mengukur kecepatan sudut pada referensi frame inersia, yang mana integral pertama dari pengukuran ini akan menyediakan perubahan sudut pada frame inersia. Output dari gyro bisa berupa kecepatan sudut atau orientasi/attitude, bergantung dari jenis gyro tersebut.

Gyro mengukur kecepatan dari badan pada frame navigasi, matriks rotasi frame navigasi terhadap frame bumi, dan matriks rotasi frame bumi terhadap frame inersia. Hubungan-hubungan ini pada frame badan diberikan oleh persamaan berikut

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \quad (2.88)$$

dengan

$\omega_{ib}^b$  : kecepatan sudut badan pada frame inersia

$\omega_{nb}^b$  : kecepatan sudut badan pada frame navigasi

$\omega_{en}^b$  : kecepatan sudut frame navigasi pada frame bumi

$\omega_{ie}^b$  : kecepatan sudut frame bumi pada frame inersia

Secara umum, dengan mempertimbangkan eror pengukuran accelero. Hasil pengukuran accelero dapat dimodelkan dengan persamaan pengamatan sebagai berikut

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \mathbf{S}\omega_{ib}^b + \mathbf{N}\omega_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon}_g \quad (2.89)$$

dengan

$\tilde{\omega}_{ib}^b$  : vektor pengukuran gyro (deg/h)

$\omega_{ib}^b$  : vektor kecepatan sudut sebenarnya (deg/h)

$\mathbf{b}_g$  : vektor bias gyro sensor (deg/h)

$\mathbf{S}_g$  : matriks eror faktor skala

$\mathbf{N}_g$  : matriks non-orthogonality triad gyro

$\boldsymbol{\varepsilon}_g$  : vektor noise gyro (deg/h)

dan

$$\mathbf{N}_g = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{g,xy} & \theta_{g,xz} \\ \theta_{g,yx} & 1 & \theta_{g,yz} \\ \theta_{g,zx} & \theta_{g,zy} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} s_{g,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{g,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{g2,z} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

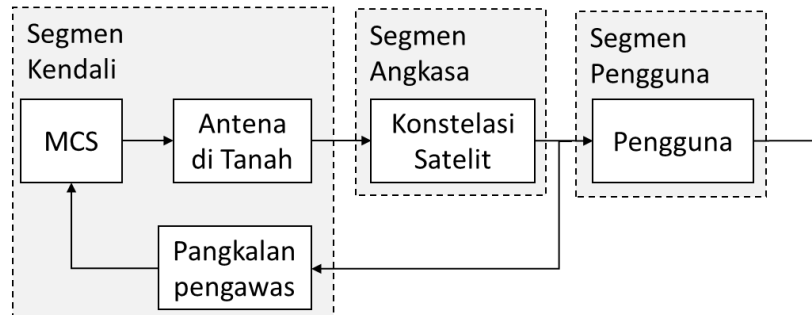
dengan  $\theta_{(\cdot),(\cdot)}$  adalah sudut yang menunjukkan misalignment antara sumbu gyro dan  $s_{(\cdot),(\cdot)}$  adalah faktor skala untuk ke tiga sumbu gyro. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa sensor accelero adalah bebas eror baik sistematis maupun acak.

### 2.2.9 Global Positioning System (GPS) [31]

GPS adalah sistem pemosisian global yang merupakan konstelasi sekurangnya dari 24 satelit yang mengorbit bumi. Satelit-satelit ini membawa *atomic clock* yang sangat stabil yang tersinkronisasi baik antara satelit satu dengan yang lainnya juga dengan jam yang berada di bumi.

Pengukuran (Sinyal) GPS yang dapat diamati dikategorikan menjadi tiga, yaitu pengukuran *pseudo range*, pengukuran *carrier phase* dan pengukuran Doppler. sedangkan struktur dari GPS terdiri tiga segmen penting, yaitu segmen angkasa, segmen kontroler dan segmen pengguna seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.6

Segmen angkasa terdiri dari konstelasi sekurangnya 24 satelit yang mengorbit bumi pada ketinggian sekitar 20.000 Km. Satelit menyebarkan sinyal radio yang berisi kode informasi dan data navigasi untuk memungkinkan pengguna menghitung data *pseudo-range* dan Doppler untuk mengestimasi posisi dan kecepatan pengguna. Segmen kontroler bertanggung jawab pada keseluruhan kontroler dan penjagaan dari sistem. Segmen kontroler terdiri dari *master control station* (MCS), pangkalan pengawas dan antena di tanah. Sedangkan segmen pengguna terdiri dari GPS-receiver yang menerima sinyal radio dari satelit GPS dan mengestimasi posisi, kecepatan dan waktu.



Gambar 2.6 Struktur GPS

### 2.2.10 Observer [32]

Observer adalah alat matematis yang dirancang untuk menyediakan estimasi dari state sebuah sistem, umumnya dengan memanfaatkan hasil pengukuran dari input dan output dari sistem tersebut. Kebutuhan untuk mengetahui state dari sistem ini adalah penting untuk menyelesaikan permasalahan dalam teori kendali, sehingga perancangan observer tersebut juga penting. Skema umum dari observer adalah seperti yang diberikan pada Gambar 2.7.

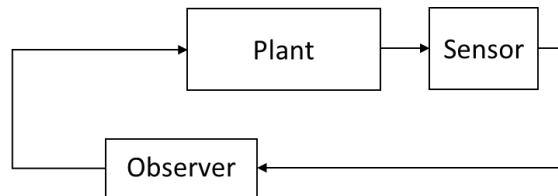
Output dari sensor digunakan sebagai masukan terhadap observer, lalu dijadikan umpan balik terhadap plant atau kontroler. Umumnya observer yang digunakan adalah Luenberger observer, observer ini bisa dirancang ketika sistem memenuhi rank keteramatan dan diberikan oleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{2.92}$$

dengan kesalahan observer memenuhi persamaan

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}\tag{2.93}$$

Karena  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  adalah dapat dikendalikan,  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .



Gambar 2.7 Struktur observer dalam sistem umpan balik

### BAB 3

## PERANCANGAN ANALISIS SISTEM QUADCOPTER

Pada bagian ini, diuraikan perancangan analisis sistem quadcopter yang digunakan pada tesis.

Notasikan beberapa variabel yang digunakan sebagai berikut

- $\mathbf{x}_r^r$  referensi state rotor
- $\mathbf{x}_b^{*r}$  referensi state badan QC
- $\mathbf{x}_b^*$  umpan balik state badan QC
- $\mathbf{e}_b$  eror state badan QC
- $\mathbf{e}_r$  eror state rotor QC
- $\mathbf{u}_b^r$  input referensi badan QC
- $\mathbf{u}_b^{*r}$  perubahan yang mungkin terjadi pada  $\mathbf{u}_b^r$
- $\mathbf{f}^r$  referensi gaya
- $\mathbf{y}_r^*$  hasil pengukuran pada kegagalan sensor rotor QC
- $\mathbf{y}_b^*$  hasil pengukuran pada kegagalan sensor badan QC
- $\mathbf{y}_{minb}$  hasil perhitungan output badan QC.
- $(.)^*$  perubahan matriks  $(.)$
- $\mathbf{R}^{rek}$  matriks konfigurasi ulang input referensi

$$\mathbf{R}^{rek}(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j < k \\ 1, & i = j > k \\ 0, & i, j \text{ yang lain} \end{cases}, i, j = 1, \dots, 4 \quad (3.1)$$

$k$  adalah baris pada  $\mathbf{x}_b^*$  yang tidak tersedia,  $\mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}$

- $\delta_r$  pengali kegagalan sensor rotor QC

$$\delta_r(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j < k \\ 1, & i = j > k \\ 0, & i, j \text{ yang lain} \end{cases}, \text{ dengan } i, j = 1, \dots, 4 \quad (3.2)$$

- $\delta_b$  pengali kegagalan sensor badan QC

$$\delta_b(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j < k \\ 1, & i = j > k \\ 0, & i, j \text{ yang lain} \end{cases}, \text{ dengan } i, j = 1, \dots, 8 \quad (3.3)$$

(3.2)-(3.3) adalah ketika pengukuran baris ke  $k$  tidak tersedia di  $\mathbf{y}_r$  dan  $\mathbf{y}_b$ .

### 3.1 Struktur dan Model Konseptual Sistem Pengendalian Quadcopter

Komponen-komponen penting dari sistem pengendalian quadcopter adalah quadcopter (QC), sensor, *data acquisition board* (DAB) dan *embedded Computer* (EC), dan pengatur kecepatan rotor (PKR). Masing-masing komponen tersebut diberikan sebagai berikut.

#### 3.1.1 Quadcopter

Quadcopter dapat dipandang sebagai sistem kaskade dari komponen rotor dan badan, dengan hubungan-hubungan berikut

- Input rotor adalah input quadcopter
- Output rotor QC adalah input badan QC
- Output badan QC adalah output quadcopter QC

Oleh karena itu untuk memodelkan quadcopter adalah dengan memodelkan masing-masing komponen tersebut

##### 3.1.1.1 Rotor dan Propeler Quadcopter

Rotor dan propeler QC diasumsikan satu bagian dan berfungsi sebagai aktuator yang menghasilkan gaya dorong dan menggerakkan badan quadcopter, sebagaimana telah dijelaskan pada subbab 2.2.1. Persamaan state dari masing-masing rotor QC dan gaya yang dihasilkan berturut-turut diberikan oleh (2.28) dan (2.33), yaitu

$$\dot{x}_{ri} = -x_{ri}/\tau_i + (K_{ri}/\tau_i) u_i \quad (3.4)$$

$$f_i = K_{di} x_{ri}^2 \quad (3.5)$$

dengan  $i = 1, 2, 3, 4$  dan

$\omega_i$  kecepatan sudut rotor ke- $i$

$\tau_i$  torsi rotor ke-  $i$

$K_{ri}$  konstanta rotor ke-  $i$

$u_i$  input rotor ke- $i$

$K_{di}$  konstanta dorong rotor ke- $i$

$f_i$  gaya dorong rotor ke- $i$

Keempat rotor QC tersebut dapat diaugmentasi ke dalam satu persamaan state sebagai berikut. Definisikan state rotor QC sebagai

$$\mathbf{x}_r = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in X_1, \text{dimensi } X_1 = 4 \quad (3.6)$$

dan input rotor QC sebagai  $\mathbf{u}_r$  adalah vektor berdimensi 4. Oleh karena itu persamaan state rotor QC diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u}_r \quad (3.7)$$

dengan

$$\mathbf{A}_r = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_4) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_r = \text{diag}(K_{r1}/\tau_1, \dots, K_{r4}/\tau_4) \quad (3.9)$$

$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  menyatakan matriks diagonal dengan elemen diagonalnya adalah  $(a_1, \dots, a_n)$ . Sedangkan bentuk augmentasi keempat gaya pada (3.5) diberikan oleh

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_d \mathbf{x}_r^2 \quad (3.10)$$

dengan

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]' \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag}(K_{d1}, \dots, K_{d4}) = \text{diag}(K_d, \dots, K_d) \quad (3.12)$$

dan  $K_d = K_{d1} = \dots = K_{d4}$  karena rotor yang digunakan adalah serupa.

Rotor QC (3.7) terhubung dengan badan QC secara kaskade, yaitu output rotor QC adalah input badan QC, yaitu

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{u}_b \quad (3.13)$$

dengan  $\mathbf{y}_r$  adalah vektor output rotor QC berdimensi 4 dan  $\mathbf{u}_b$  adalah vektor input badan QC berdimensi 4. Padahal hubungan  $\mathbf{u}_b$  dengan  $\mathbf{f}$  pada (3.11) diberikan oleh

$$\mathbf{u}_b = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & 0 & l \\ -l & 0 & l & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Substitusikan (3.10) ke (3.14) dihasilkan

$$\mathbf{u}_b = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_r) = \begin{bmatrix} K_d(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ lK_d(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lK_d(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ dK_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Karena  $\mathbf{y}_r = \mathbf{u}_b$ , Persamaan pengukuran rotor yaitu persamaan yang menghubungkan state dengan output rotor QC dapat disusun sebagaimana yang diberikan pada (3.15), yaitu

$$\mathbf{y}_r = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_r) \quad (3.16)$$

### 3.1.1.2 Badan Quadcopter

Persamaan dinamika badan quadcopter yang diberikan pada (2.37) dan (2.38) diaugmentasi ke dalam satu persamaan state dengan mengabaikan dinamika  $\ddot{x}$  dan  $\ddot{y}$  sebagai berikut [33]. Definisikan state badan quadcopter sebagai

$$\mathbf{x}_b = (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})' \in X_2, \text{ dimensi } X_2 = 8 \quad (3.17)$$

dan input badan QC seperti yang diberikan pada (3.13). Oleh karena itu persamaan state badan QC diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_b) + \mathbf{g}_b(\mathbf{x}_b)\mathbf{u}_b \quad (3.18)$$

dengan

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}_b) = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ -(K_{tz}\dot{z}/m) - g \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z)/I_x - K_{rx}\ddot{\phi}^2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x)/I_y - K_{ry}\ddot{\theta}^2 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y)/I_z - K_{rz}\ddot{\psi}^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{x}_b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_\theta C_\phi/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$C_\theta$  dan  $C_\phi$  berurutan mewakili  $\cos \theta$  dan  $\cos \phi$ . Asumsikan bahwa persamaan pengukuran badan QC diberikan oleh

$$\mathbf{y}_b = \mathbf{H}_b \mathbf{x}_b \quad (3.21)$$

dengan  $\mathbf{y}_b$  adalah vektor output badan QC berdimensi 8 dan

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{I}_8 \quad (3.22)$$

### 3.1.1.3 Persamaan Matematis Augmentasi Quadcopter

Sistem augmentasi quadcopter disusun berdasarkan persamaan-persamaan rotor QC dan badan QC. Definisikan state augmentasi QC sebagai

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}, \quad (3.23)$$



input dan output QC berurutan diberikan sebagai  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{y}$ , dengan dimensi  $\mathbf{u} = 4$  dan dimensi  $\mathbf{y} = 8$ . Dengan hubungan rotor QC dan badan QC seperti yang telah diberikan pada subbab 3.1.1, yaitu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{y}_r = \mathbf{u}_b$  dan  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_b$  didapatkan representasi sistem augmentasi QC sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{3.24}$$

dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r \\ \mathbf{g}_b(\mathbf{x}_b)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_r) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1/\tau \\ -\omega_2/\tau \\ -\omega_3/\tau \\ -\omega_4/\tau \\ \dot{z} \\ (C_\theta C_\phi K_{d1}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - K_{tx}\dot{z})/m \\ \dot{\phi} \\ (\dot{\theta}\dot{\psi}(I_z - I_x) + lK_{d2}(-\omega_2^2 + \omega_4^2))/I_x - K_{rx}\dot{\phi}^2 \\ \dot{\theta} \\ (\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) + lK_{d3}(-\omega_1^2 + \omega_3^2))/I_y - K_{ry}\dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi} \\ ((\dot{\phi}\dot{\psi}(I_x - I_y) + dK_{d4}(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2))/I_z - K_{rz}\dot{\psi}^2) \end{bmatrix}\tag{3.25}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\tag{3.26}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{H}_b]\tag{3.27}$$

$\mathbf{B}_r$  dan  $\mathbf{H}_b$  berurutan seperti yang diberikan pada (3.9) dan (3.22).

#### 3.1.1.4 Linearisasi Komponen Quadcopter

Sistem pengendalian dirancang untuk quadcopter pada kondisi hover, yaitu ketika  $\phi = \dot{\phi} = \theta = \dot{\theta} = \psi = \dot{\psi} \approx 0^\circ$ ,  $\dot{z} \approx 0$  dan  $u_{b1} = mg(\omega_i = \sqrt{mg/4K_p})$  [33]. Ekspansi Taylor digunakan untuk melinearisasi pada titik kerja tersebut sebagai berikut. Ambil  $\phi = \dot{\phi} = \theta = \dot{\theta} = \psi = \dot{\psi} \approx 0^\circ$ ,  $\dot{z} \approx 0$  sebagai  $\mathbf{x}^*$  dan  $\omega_i = \sqrt{mg/4K_p}$  sebagai  $\omega^*$ . Persamaan state rotor QC (3.7) sudah linear, Sedangkan persamaan pengukurannya (3.16) dilinearisasi sehingga didapatkan

$$\mathbf{y}_r = (d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_r)/d\mathbf{x}_r|_{\omega^*})\mathbf{x}_r = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_r\tag{3.28}$$

dengan

$$\mathbf{H}_r = \sqrt{K_d mg} \begin{bmatrix} 1/m & 1/m & 1/m & 1/m \\ 0 & -l & 0 & l \\ -l & 0 & l & 0 \\ d/K_d & -d/K_d & d/K_d & -d/K_d \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Hasil linearisasi persamaan state badan QC (3.18) diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (3.30)$$

dengan

$$\mathbf{A}_b = d(\mathbf{f}_b(\mathbf{x}_b))/d\mathbf{x}_b|_{x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{tx}/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{B}_b = d(\mathbf{g}_b(\mathbf{x}_b))/d\mathbf{u}_b|_{x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Persamaan pengukuran badan QC (3.21) sudah linear sehingga tidak perlu dilinearisasi.

### 3.1.1.5 Linearisasi Augmentasi Quadcopter

Pada sistem augmentasi quadcopter, linearisasi dengan ekspansi Taylor dilakukan terhadap sistem yang diberikan pada (3.24), sehingga didapatkan representasi sistem linear augmentasi QC sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.33)$$

dengan

$$\mathbf{A} = d(\mathbf{f}(\mathbf{x}))/d\mathbf{x}|_{x^*, \omega^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{rb} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{B} = d(\mathbf{g})/d\mathbf{u}|_{x^*, \omega^*} = \mathbf{g} \quad (3.35)$$

$\mathbf{A}_r$  dan  $\mathbf{A}_b$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.8) dan (3.31). Sedangkan  $\mathbf{A}_{rb}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{rb} &= d(\mathbf{g}_b(\mathbf{x}_b))/d\mathbf{u}_b|_{\mathbf{x}^*} d(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_r))/d\mathbf{x}_r|_{\omega^*} \\
&= \mathbf{B}_b \mathbf{H}_r \\
&= \sqrt{K_d m g} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m^2 & 1/m^2 & 1/m^2 & 1/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l^2/I_x & 0 & l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l^2/I_y & 0 & l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ dl/K_d I_z & -dl/K_d I_z & dl/K_d I_z & -dl/K_d I_z \end{bmatrix} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$\mathbf{H}$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.27),  $\mathbf{H}$  sudah linear sehingga tidak perlu dilinearisasi.

Selain cara di atas, persamaan linear augmentasi QC bisa diaugmentasi berdasarkan hasil linearisasi dari komponen-komponen QC yang diberikan pada subbab sebelumnya, melalui hubungan  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{y}_r = \mathbf{u}_b$  dan  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_b$ .

### 3.1.1.6 Representasi Bentuk Jordan dan Bentuk Normal

Representasi bentuk Jordan dan bentuk normal QC digunakan untuk tujuan analisis. Representasi tersebut diberikan sebagai berikut.

Karena matriks  $\mathbf{A}_r$  pada (3.7) adalah matriks diagonal, nilai eigen  $\mathbf{A}_r$  merupakan elemen-elemen diagonalnya, notasikan sebagai  $\lambda_{i\mathbf{A}_r} = -1/\tau_i, i = 1, 2, 3, 4$ . Oleh karena itu persamaan state dan pengukuran rotor QC, (3.7) dan (3.28) sudah dalam bentuk normal dan notasikan ulang sebagai

$$\begin{aligned}
S_r: \dot{\hat{\mathbf{x}}}_r &= \hat{\mathbf{A}}_r \hat{\mathbf{x}}_r + \hat{\mathbf{B}}_r \mathbf{u}_r \\
\mathbf{y}_r &= \hat{\mathbf{H}}_r \hat{\mathbf{x}}_r
\end{aligned} \quad (3.37)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{A}}_r = \mathbf{A}_r \quad (3.38)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_r = \mathbf{B}_r \quad (3.39)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_r = \mathbf{H}_r \quad (3.40)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{x}_r \quad (3.41)$$

Karakteristik polinomial dari  $\mathbf{A}_b$  pada (3.30) diberikan oleh

$$\Delta(\mathbf{A}_b) = (\lambda + K_{tx})(\lambda)^7 \quad (3.42)$$

Terdapat dua nilai eigen yang berbeda dari  $\mathbf{A}_b$  yaitu  $\lambda_{1A_b} = -K_{tx}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b} = 0$ . Oleh karena itu  $\mathbf{Q}_b$  diberikan oleh

$$\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} -1/K_{tx} & -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Didapatkan representasi bentuk Jordan badan QC sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_b: \dot{\hat{\mathbf{x}}}_b &= \hat{\mathbf{A}}_b \hat{\mathbf{x}}_b + \hat{\mathbf{B}}_b \mathbf{u}_b \\ \mathbf{y}_b &= \hat{\mathbf{H}}_b \hat{\mathbf{x}}_b \end{aligned} \quad (3.44)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{A}}_b = \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{A}_b \mathbf{Q}_b \quad (3.45)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_b = \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{B}_b \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_b = \mathbf{H}_b \mathbf{Q}_b \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b = \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{x}_b \quad (3.48)$$

Blok Jordan pada  $\hat{\mathbf{A}}_b$  disusun ulang menjadi

$$\hat{\mathbf{A}}_b = \begin{bmatrix} \lambda_{1A_b} & | & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & | & \lambda_{2A_b} & | & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & | & \lambda_{2A_b} & 1 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & | & 0 & \lambda_{2A_b} & | & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & \lambda_{2A_b} & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{2A_b} & | & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & \lambda_{2A_b} & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{2A_b} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Bentuk Jordan sistem augmentasi quadcopter dibangun dari  $S_r$  dan  $S_b$ , dan diberikan oleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.50)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_r \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_r & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{rb} & \hat{\mathbf{A}}_b \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{rb} = \hat{\mathbf{B}}_b \hat{\mathbf{H}}_r \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{H}}_b] \quad (3.55)$$

dan  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$  seperti yang diberikan pada (3.8). Karena nilai eigen  $\mathbf{A}_r$  dan  $\mathbf{A}_b$  adalah berbeda,  $\lambda_{jA_r} - \lambda_{iA_b} \neq 0, \forall i, j, j = 1, 2, 3, 4, i = 1, 2, \dots, 8$ , persamaan (3.50) dapat dinyatakan dalam bentuk normal dengan mendefinisikan

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\gamma} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.56)$$

dengan  $-\boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{A}}_r + \hat{\mathbf{A}}_b \boldsymbol{\gamma} = -\hat{\mathbf{A}}_{rb}$ , yaitu

$$[\boldsymbol{\gamma}_{ij}] = \hat{\mathbf{A}}_{ijrb} / \lambda_{jA_r} - \lambda_{iA_b} \quad (3.57)$$

Substitusikan (3.56)-(3.57) ke dalam (3.50) didapatkan

$$\begin{aligned} S: \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_b \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_r \\ -\boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{B}}_r \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{\mathbf{H}}_b \boldsymbol{\gamma} \quad \hat{\mathbf{H}}_b] \quad (3.61)$$

Untuk kebutuhan analisis, representasi sistem yang digunakan adalah  $S_r, S_b$  dan  $S$ .

### 3.1.2 Sensor

Sensor yang digunakan pada badan QC terdapat dua macam, yaitu IMU dan GPS-receiver seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1. Diasumsikan bahwa IMU memiliki modul integral, oleh karena itu IMU dapat menyediakan informasi berupa

$$\mathbf{y}_i = (\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_g) \quad (3.62)$$

dengan

$$\mathbf{y}_a = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (3.63)$$

$$\mathbf{y}_g = (\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) \quad (3.64)$$

$\mathbf{y}_a$  dan  $\mathbf{y}_b$  berurutan merupakan hasil pengukuran dari sensor accelero dan gyro. Sedangkan pada GPS receiver diasumsikan terdapat modul turunan, sehingga informasi yang disediakan berupa

$$\mathbf{y}_s = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (3.65)$$

Ketika GPS-receiver dan IMU bekerja, pengukuran GPS-receiver digunakan untuk menambah akurasi dari data yang disediakan IMU. Oleh karena itu  $\mathbf{y}_b$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.62),

$$\mathbf{y}_b = \mathbf{y}_i \quad (3.66)$$

### 3.1.3 Data Acquisition Board (DAB) dan Embedded Computer (EC)

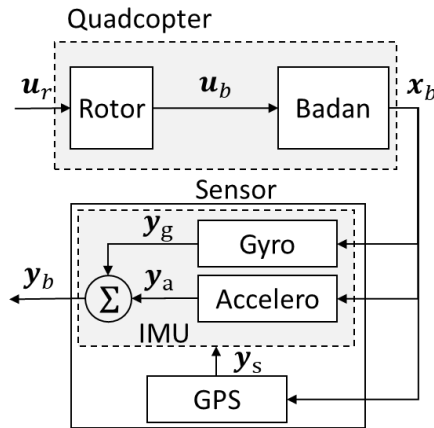
DAB bersama dengan EC mengendalikan gerakan dan orientasi badan QC melalui pembacaan sinyal referensi dan unpan balik untuk digunakan menghasilkan sinyal referensi perintah yang sesuai.

Prosedur DAB dan EC terdiri dari tiga bagian/tahap seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 3.2. Tahap pertama adalah mengalokasikan  $\mathbf{u}_b^r$  melalui

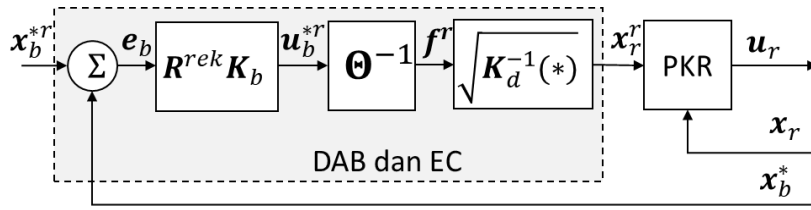
$$\mathbf{u}_b^r = \mathbf{K}_b \mathbf{e}_b \quad (3.67)$$

dengan  $\mathbf{K}_b = \text{diag}(K_{b1}, \dots, K_{b4})$  dan

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{x}_b^{*r} - \mathbf{x}_b^* = [z^r \ \phi^r \ \theta^r \ \psi^r]' - [z \ \phi \ \theta \ \psi]' \quad (3.68)$$



Gambar 3.1 Letak dan output dari blok sensor



Gambar 3.2 Fungsi dan letak DAB dan EC dalam sistem

Karena ada kemungkinan baris ke  $k$  dari  $\mathbf{x}_b^*$  tidak tersedia untuk diumpan balikkan,  $\mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}$ , dibutuhkan matriks rekonfigurasi sehingga  $\mathbf{u}_{b_k}^r = 0$ , yaitu melalui  $\mathbf{R}^{rek}$ .

Oleh karena itu persamaan (3.67) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b^{*r} &= \mathbf{R}^{rek} \mathbf{K}_b \mathbf{e}_b \\ &= \mathbf{R}^{rek} \mathbf{u}_b^r \end{aligned} \quad (3.69)$$

Tahap kedua adalah mengubah  $\mathbf{u}_b^{*r}$  tersebut menjadi  $\mathbf{f}^r$  dengan menyelesaikan (3.14) yaitu

$$\mathbf{u}_b^{*r} = \mathbf{\Theta} \mathbf{f}^r \quad (3.70)$$

Persamaan (3.70) bisa diselesaikan jika  $\mathbf{\Theta}$  adalah *full rank*, yaitu untuk  $\mathbf{\Theta}_i$  adalah kolom ke  $i$  dari  $\mathbf{\Theta}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , sehingga persamaan berikut

$$a_1 \mathbf{\Theta}_1 + a_2 \mathbf{\Theta}_2 + a_3 \mathbf{\Theta}_3 + a_4 \mathbf{\Theta}_4 = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

berlaku hanya ketika  $a_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , kondisi ini dapat dipenuhi jika hanya jika untuk setiap  $\mathbf{\Theta}_i$  adalah independen secara linear satu sama lain sebagai berikut

$$\begin{aligned} a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -l \\ d \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -l \\ 0 \\ -d \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ l \\ d \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 \\ l \\ 0 \\ -d \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & 0 & l \\ -l & 0 & l & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & 0 & l \\ 0 & l & 2l & l \\ 0 & 2d & 0 & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & 0 & l \\ 0 & 0 & 2l & 2l \\ 0 & 0 & 0 & 4dl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4dl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Operasi di atas merupakan eliminasi Gaussian. Matriks terakhir pada (3.72) merupakan bentuk eselon dari matriks  $\Theta$  dan dapat ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ -la_2 &= 0 \\ 2la_3 &= 0 \\ 4dla_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

menghasilkan  $a_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , oleh karena itu  $\Theta$  adalah *full rank*, maka persamaan (3.70) dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b^{*r} &= \Theta \mathbf{f}^r \\ \Theta^{-1} \mathbf{u}_b^{*r} &= \Theta^{-1} \Theta \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^r &= \Theta^{-1} \mathbf{u}_b^{*r} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Tahap ketiga mengubah  $\mathbf{f}^r$  tersebut menjadi  $\mathbf{x}_r^r$  dengan menyelesaikan (3.10) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^r &= \mathbf{K}_d (\mathbf{x}_r^r)^2 \\ \mathbf{x}_r^r &= \pm \sqrt{\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{f}^r}, \mathbf{x}_r \geq 0 \\ \mathbf{x}_r^r &= \sqrt{\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{f}^r} \end{aligned} \tag{3.75}$$

dengan  $\mathbf{K}_d$  seperti yang diberikan pada (3.12).

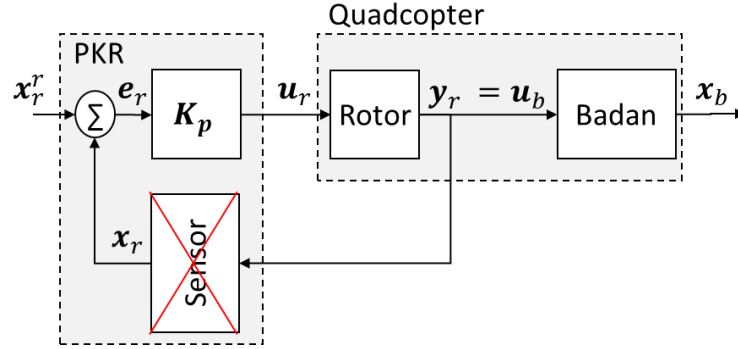
Untuk menyederhanakan penyebutan, EC digunakan untuk mewakili DAB dan EC.

### 3.1.4 Pengatur Kecepatan Rotor (PKR)

PKR berfungsi sebagai kendali kecepatan putar rotor. Tiap satu PKR dihubungkan dengan satu rotor. Karena quadcopter memiliki empat rotor, dibutuhkan empat PKR. Ada dua komponen penting pada PKR, yaitu kontroler dan sensor seperti yang diberikan oleh Gambar 3.3. kontroler menghasilkan  $\mathbf{u}_r$  berdasarkan selisih antara  $\mathbf{x}_r^r$ , dan informasi unpan balik  $\mathbf{x}_r$ , melalui persamaan

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r \tag{3.76}$$





Gambar 3.3 Blok diagram PKR

dengan  $K_p = \text{diag}(K_{p1}, K_{p2}, K_{p3}, K_{p4})$  dan

$$e_r = x_r^r - x_r \quad (3.77)$$

Sensor PKR pada penelitian ini diasumsikan gagal, sehingga  $x_r = \mathbf{0}$

### 3.2 Kegagalan Komponen Sensor

Kegagalan komponen yang menjadi perhatian pada tesis ini adalah kegagalan sensor. Sensor disebut gagal apabila masuk salah satu kriteria berikut

1. Sensor tidak dapat beroperasi atau tidak dapat digunakan sama sekali
2. Sensor masih bisa digunakan tetapi terkendala jangka waktu pemakaian
3. Sensor mengalami kelainan dan dapat membahayakan bila digunakan

Pada penelitian ini, kegagalan sensor diasumsikan masuk dalam kriteria 1.

Mengacu pada [17], sensor diklasifikasikan sebagai sensor kritis dan tidak kritis. Kegagalan sensor kritis mengakibatkan hilangnya keteramatan sistem. Oleh karena itu untuk mengetahui peran dari masing-masing sensor QC, dipertimbangkan variasi kegagalan sensor seperti yang diberikan pada Ketika sensor accelero adalah satu-satunya sensor yang bekerja, informasi yang disediakan adalah

$$y_b^* = y_a = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (3.79)$$

Oleh karena itu ketika IMU berfungsi, nilai  $y_b^*$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.62). Ketika GPS-receiver adalah satu-satunya sensor yang bekerja,  $y_b^*$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.65).

Tabel 3.1. dan Gambar 3.4. Kegagalan-kegagalan tersebut memungkinkan berubahnya  $y_b$ , notasikan sebagai  $y_b^*$ , sebagai berikut.

Ketika sensor gyro adalah satu-satunya sensor yang bekerja, informasi yang disediakan adalah

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_g = (\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) \quad (3.78)$$

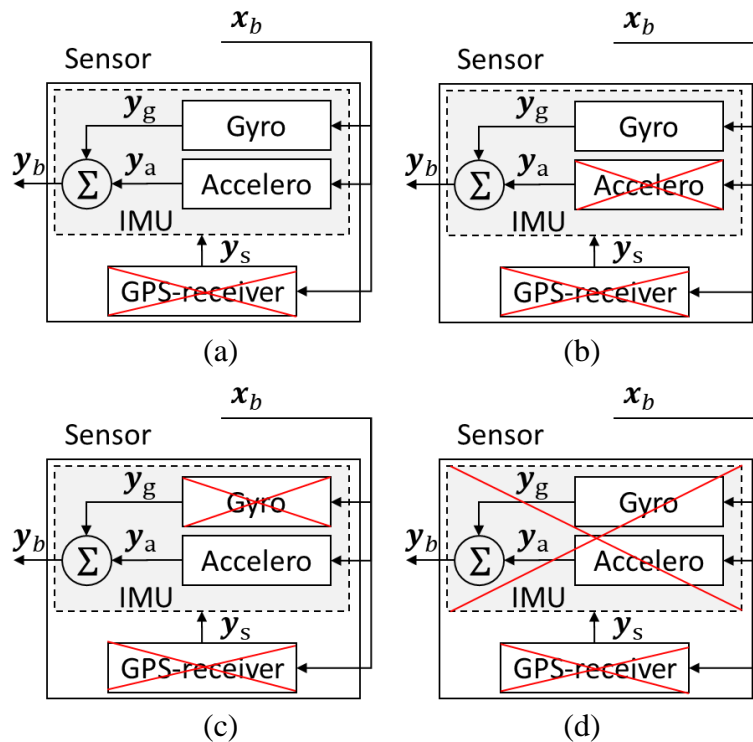
Ketika sensor accelero adalah satu-satunya sensor yang bekerja, informasi yang disediakan adalah

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_a = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (3.79)$$

Oleh karena itu ketika IMU berfungsi, nilai  $\mathbf{y}_b^*$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.62). Ketika GPS-receiver adalah satu-satunya sensor yang bekerja,  $\mathbf{y}_b^*$  adalah sama dengan yang diberikan pada (3.65).

Tabel 3.1. Variasi kegagalan sensor

Sensor Kondisi	IMU		GPS-receiver
	Gyro	Accelero	
1	sehat	sehat	gagal
2	sehat	gagal	gagal
3	gagal	sehat	gagal
4	gagal	gagal	sehat



Gambar 3.4 Variasi kegagalan sensor (a) IMU sehat dan GPS-receiver gagal (b) Gyro sehat, accelero dan GPS-receiver gagal (c) Accelero sehat, gyro dan GPS-receiver gagal (d) GPS-receiver sehat dan IMU gagal

### 3.3 Analisis Keteramatan Quadcopter

Pada sistem augmentasi, tidak cukup analisis dilakukan pada masing-masing komponen, karena keteramatan ada kemungkinan hilang ketika terhubung [7]. Oleh karena itu, analisis QC dilakukan pada sistem  $S_r$ ,  $S_b$  dan  $S$ .

Diasumsikan bahwa hilangnya keteramatan terjadi karena kegagalan sensor. Oleh karena itu keempat sensor rotor QC selalu gagal,  $S_r$  tidak dapat diamati, sebagai berikut

Ambil  $\mathbf{y}_r^* = \{\mathbf{0}\}$  adalah hasil pengukuran ketika keempat sensor rotor QC gagal. Hubungan  $\mathbf{y}_r^*$  dengan  $\mathbf{y}_r$  diberikan oleh

$$\delta_r \mathbf{y}_r^* = \mathbf{y}_r \quad (3.80)$$

dengan  $\delta_r = \mathbf{0}$  karena semua pengukuran sensor tidak tersedia. Substitusikan (3.80) ke (3.28) didapatkan

$$\begin{aligned} \delta_r \mathbf{y}_r &= \mathbf{H}_r \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_r &= \delta_r \mathbf{H}_r \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{H}_r^* \mathbf{x}_r \end{aligned} \quad (3.81)$$

$\mathbf{H}_r^*$  dalam notasi normalnya diberikan oleh

$$\hat{\mathbf{H}}_r^* = \mathbf{H}_r^* = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

Karena kolom  $\hat{\mathbf{H}}_r^*$  adalah nol,  $S_r$  tidak dapat diamati.

Ketika sensor badan QC yang mengalami kegagalan seperti yang dijelaskan pada subbab 3.2, dualitas terhadap kegagalan sensor rotor QC, perubahan  $\mathbf{y}_b$ , yaitu  $\mathbf{y}_b^*$ , akan mempengaruhi keteramatan badan QC sebagai berikut

Ambil pengukuran baris ke  $k = 1, 2$  tidak tersedia, didapatkan

$$\delta_b \mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_b \quad (3.83)$$

Dengan

$$\delta_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Substitusikan (3.83) ke (3.21) didapatkan

$$\begin{aligned} \delta_b \mathbf{y}_b &= \mathbf{H}_b \mathbf{x}_b \\ \mathbf{y}_b &= \delta_b^+ \mathbf{H}_b \mathbf{x}_b \\ \mathbf{y}_b &= \mathbf{H}_b^* \mathbf{x}_b \end{aligned} \quad (3.85)$$

$\mathbf{H}_b^*$  substitusikan ke (3.47) didapatkan bentuk Jordannya sebagai berikut

$$\hat{H}_b^* = H_b^* Q_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Karena terdapat kolom nol pada  $\hat{H}_b^*$ ,  $S_b$  tidak dapat diamati.

Sistem augmentasi  $S$ , yang merupakan augmentasi dari kedua sistem tersebut, mengalami perubahan pada matriks  $\hat{H}$ , yaitu  $\hat{H}^*$ , sebagai berikut.

Substitusikan  $\hat{H}_r^*$  terhadap (3.53) didapatkan

$$\hat{A}_{rb}^* = \hat{B}_b \hat{H}_r^* = \mathbf{0} \quad (3.87)$$

Substitusikan (3.87) ke (3.57) didapatkan

$$[\gamma_{ij}] = \hat{A}_{rb}^* / \lambda_{iA_r} - \lambda_{iA_b} = [\mathbf{0}_{ij}] \quad (3.88)$$

Substitusikan (3.88) dan  $\hat{H}_b^*$  pada (3.58) didapatkan

$$\mathbf{y} = \hat{H}^* \hat{\mathbf{x}} \quad (3.89)$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{H}^* &= [\hat{H}_b^* \gamma \quad \hat{H}_b^*] \\ &= [\mathbf{0} \quad \hat{H}_b^*] \end{aligned} \quad (3.90)$$

Kolom nol pada  $\hat{H}^*$  berhubungan dengan tiap blok nilai eigen rotor,  $\lambda_{jA_r}, j = 1, \dots, 4$  di  $\hat{A}$  pada (3.58). Oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_r$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak dapat diamati. Sedangkan tiap kolom  $\hat{H}_b^*$  pada  $\hat{H}^*$  berhubungan dengan tiap blok Jordan eigen badan  $\lambda_{iA_b}, i = 1, \dots, 8$  di  $\hat{A}$  pada (3.58) dan telah ditunjukkan terdapat kolom nol, oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak dapat diamati.

Ketika informasi  $\mathbf{y}_b^*$  tidak cukup untuk menjaga keteramatan badan QC, maka termasuk penjagaan keteramatan QC adalah kemampuan menghitung hasil pengukuran yang tidak tersedia berdasarkan dari  $\mathbf{y}_b^*$ , yaitu

$$\Phi_b: \mathbf{y}_b^* \rightarrow \mathbf{y}_{minb} \quad (3.91)$$

Badan QC dapat diamati ketika

$$\mathbf{y}_{minb} = \mathbf{x}_b = (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) \quad (3.92)$$

Ketika  $\mathbf{y}_{minb} \neq \mathbf{x}_b$ , badan QC tidak dapat diamati.

Karena  $\mathbf{y}_r^* = \{\mathbf{0}\}$ , rotor QC tidak dapat diamati, oleh karena itu juga termasuk sebagai penjagaan keteramatan QC adalah kemampuan untuk mendapatkan  $\mathbf{y}_r$  berdasarkan data  $\mathbf{y}_{minb}$  pada (3.90), yaitu

$$\Phi_r: \mathbf{y}_{minb} \rightarrow \mathbf{y}_r \quad (3.93)$$

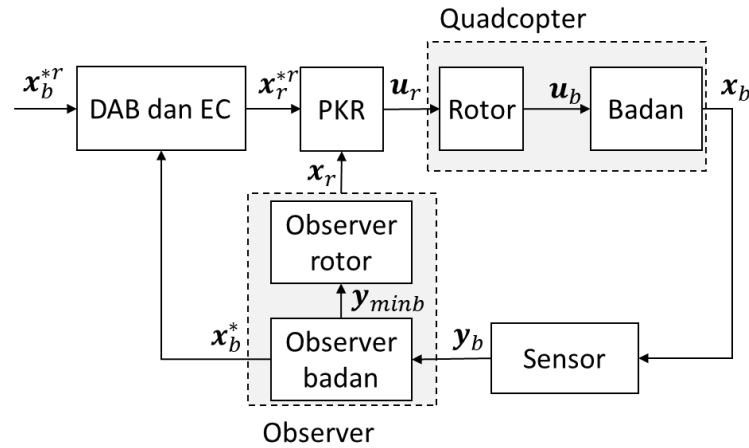
sehingga rotor dapat diamati. Syarat tersebut dapat dipenuhi karena loop terbuka quadcopter adalah dapat dikendalikan [11], sehingga  $\Phi_r$  diberikan pada (3.93), ditulis ulang sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{r,t_1} = \mathbf{u}_{b,t_1} &= \Phi_r(\mathbf{y}_{minb}) \\ &= \mathbf{B}'_b e^{\mathbf{A}'_{b,t_1-t_0}} \mathbf{W}_{c,t_1}^{-1} (e^{\mathbf{A}_{b,t_1}} \mathbf{y}_{minb,t_0} - \mathbf{y}_{minb,t_1}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

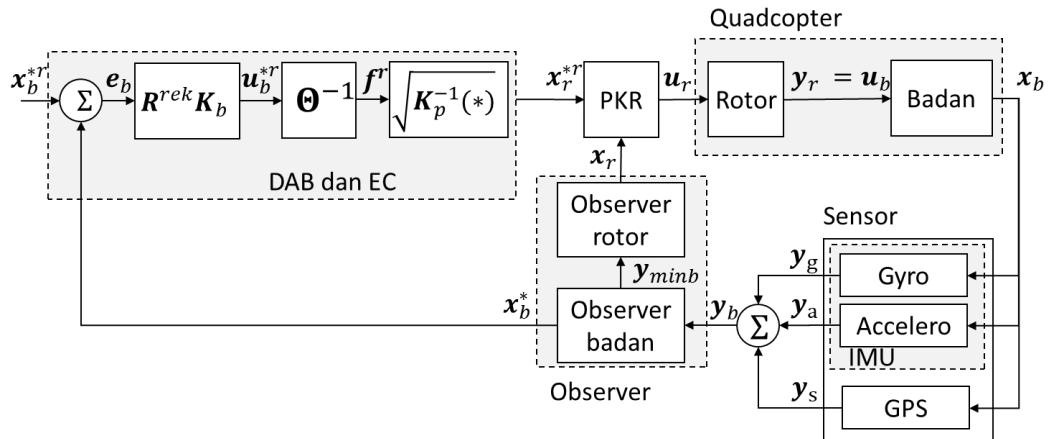
Berdasarkan argumen-argumen ini, analisis keteramatan dicirikan sebagai berikut.

**Preposisi 1.** Asumsikan bahwa quadcopter dapat diamati, maka kondisi berikut terpenuhi

- $\exists \Phi_b(\mathbf{y}_b^*) = \mathbf{y}_{minb}$ , sehingga badan QC,  $S_b$  dapat diamati
- $\exists \Phi_r(\mathbf{y}_{minb}) = \mathbf{y}_r$ , sehingga rotor QC,  $S_r$  dapat diamati
- Augmentasi quadcopter  $S$  dapat diamati.



Gambar 3.5 Struktur blok observer pada sistem



Gambar 3.6 Diagram blok toleransi kegagalan sistem pengendalian quadcopter

### 3.4 Observer

Observer dirancang untuk merealisasikan hasil dari analisis keteramatan yang dilakukan pada masing-masing sensor. Selain itu, observer juga berfungsi menyediakan state umpan balik untuk loop dalam dan luar seperti yang diberikan pada Gambar 3.5.

### 3.5 Diagram Blok Toleransi Kegagalan Sistem Pengendalian Quadcopter

Diagram blok dari toleransi kegagalan sistem pengendalian quadcopter diberikan oleh (3.20). Diagram merupakan gabungan dari seluruh blok diagram dan penjelasan pada subbab sebelumnya. Pada blok diagram tersebut, sinyal referensi  $\mathbf{x}_b^{*r}$  yang dikirimkan terhadap sistem bisa berupa sinyal referensi secara manual (*joystick*), maupun dari komputer. Banyaknya sinyal referensi ini bergantung pada banyaknya state yang akan diatur, pada tesis ini state yang diatur adalah  $\mathbf{x}_b^*$ . Selisih antara  $\mathbf{x}_b^{*r}$  dan  $\mathbf{x}_b^*$  digunakan untuk menghasilkan  $\mathbf{u}_b^r$ . Selanjutnya melalui model  $\mathbf{u}_b^r$  dikonversi menjadi  $\mathbf{f}^r$  lalu dikonversi lagi menjadi  $\mathbf{x}_r^r$  yang sesuai. Perbedaan  $\mathbf{x}_r^r$  dan  $\mathbf{x}_r$  yang didapatkan dari observer rotor diolah oleh PKR dan menghasilkan sinyal input untuk masing-masing rotor QC,  $\mathbf{u}_r$ .  $\mathbf{u}_b$  sebagai input badan QC merupakan output rotor  $\mathbf{y}_r$ .

Output sensor diolah oleh observer untuk menyediakan informasi state umpan balik untuk loop luar,  $\mathbf{x}_b^*$  maupun loop dalam  $\mathbf{x}_r$  sebagaimana yang dijelaskan pada subbab sebelumnya.

### 3.6 Analisis Keterkendalian Quadcopter Loop Tertutup

Multi-rotor loop terbuka adalah bisa dikendalikan ketika komponen aktuator bekerja dengan baik, terlepas dari kegagalan sensor [11]. Oleh karena itu, quadcopter loop terbuka yang mengalami kegagalan sensor pada tesis ini adalah dapat dikendalikan. Sedangkan quadcopter sebagai sistem pengendalian loop tertutup yang diberikan pada Gambar 3.6 bergantung pada kelengkapan  $\mathbf{x}_b^*$  sebagai berikut.

$\hat{\mathbf{x}}_r^r$  yang didapatkan pada proses EC dan  $\hat{\mathbf{x}}_r$  yang disediakan observer rotor QC merupakan input rotor dan diberikan oleh

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{K}_r(\mathbf{x}_r^r - \mathbf{x}_r) \quad (3.95)$$

Substitusikan terhadap (3.37) didapatkan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{K} (\mathbf{x}_r^r - \mathbf{x}_r) \\ &= (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{K}) \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{K} \mathbf{x}_r^r\end{aligned}\quad (3.96)$$

$(\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{K})$  adalah matriks diagonal, oleh karena itu keterkendalian rotor QC loop tertutup bergantung pada  $\mathbf{B}_r \mathbf{K}$ , dan tetap terjaga karena  $\mathbf{K}_r$  adalah matriks diagonal. Oleh karena itu dapat dinyatakan bahwa

$$\mathbf{x}_r^r \equiv \mathbf{x}_r \quad (3.97)$$

Substitusikan (3.97) ke dalam (3.44) didapatkan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b (\mathbf{H}_r \mathbf{x}_r) \\ &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b (\mathbf{H}_r \mathbf{x}_r^r) \\ &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b^r\end{aligned}\quad (3.98)$$

Perubahan pada  $\mathbf{u}_b^r$ , yaitu  $\mathbf{u}_b^{*r}$ , karena tidak lengkapnya  $\mathbf{x}_b^*$  seperti yang diberikan pada (3.69) dapat dipandang sebagai perubahan  $\mathbf{B}_b$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b^{*r} \\ &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b (\mathbf{R}^{rek} \mathbf{K} \mathbf{e}_b) \\ &= \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + (\mathbf{B}_b \mathbf{R}^{rek}) \mathbf{K} \mathbf{e}_b\end{aligned}\quad (3.99)$$

ambil

$$\mathbf{B}_b^* = \mathbf{B}_b \mathbf{R}^{rek} \quad (3.100)$$

Substitusikan (3.100) ke (3.99) diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b^* \mathbf{u}_b^r \quad (3.101)$$

$\mathbf{B}_b^*$  dalam bentuk Jordannya diberikan oleh

$$\hat{\mathbf{B}}_b^* = \mathbf{Q}_b \mathbf{B}_b^* \quad (3.102)$$

Perubahan  $\hat{\mathbf{B}}_b$  menghasilkan perubahan  $\hat{\mathbf{B}}$  pada  $S$ , dan diberikan oleh

$$\hat{\mathbf{B}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_r \\ -\gamma \hat{\mathbf{B}}_r \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

dengan

$$[\gamma_{ij}] = \hat{\mathbf{A}}_{ij,rb} / \lambda_{i,A_r} - \lambda_{j,A_b} = (\hat{\mathbf{H}}_r \hat{\mathbf{B}}_b^*)_{ij} / \lambda_{i,A_r} - \lambda_{j,A_b} \quad (3.104)$$

Oleh karena itu tidak lengkapnya umpan balik  $\mathbf{x}_b^*$  berpengaruh pada keterkendalian badan QC  $S_b$ , dan sama artinya terhadap keterkendalian augmentasi QC,  $S$ .

Sebagai dualitas dari keteramatan, syarat perlu dari keterkendalian loop tertutup QC dapat dikendalikan adalah  $S_b$  dan  $S_r$  dapat dikendalikan. Sebagai tambahan  $S_b$  dapat dikendalikan setelah terhubung, yaitu analisis yang dilakukan

pada  $S$ , menunjukkan bahwa  $S$  dapat dikendalikan [7]. Sedangkan perubahan keterkendalian yang terjadi pada  $S_b$  (atau  $S_r$ ) mengakibatkan perubahan keterkendalian pada  $S$ , sebagaimana yang diberikan pada (3.103)-(3.104).

Berdasarkan argumen-argumen ini, analisis keterkendalian loop tertutup dapat dicirikan sebagai berikut.

Definisikan  $S_t$  sebagai sistem loop tertutup quadcopter

**Preposisi 2** Asumsikan loop tertutup quadcopter  $S_t$  dapat dikendalikan, maka kondisi berikut terpenuhi

- a. Rotor quadcopter,  $S_r$  dapat dikendalikan
- b.  $\nexists \mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}, k = 1, \dots, 4$ , sehingga badan quadcopter,  $S_b$  dapat dikendalikan
- c. Augmentasi quadcopter  $S$  dapat dikendalikan



## BAB 4

### PERAN IMU PADA KETERAMATAN DAN KETERKENDALIAN SISTEM QUADCOPTER

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai analisis keteramatan dan keterkendalian dari sistem quadcopter dengan hanya IMU yang dipertimbangkan sebagai sensor yang digunakan atau dipasang pada badan quadcopter. Analisis terdiri dari dua bagian, yaitu analisis keteramatan dan analisis keterkendalian loop tertutup.

#### 4.1 Peran Sensor IMU

Ketika IMU Sempurna, yaitu ketika sensor gyro dan accelero bekerja, IMU menyediakan informasi seperti pada (3.62). Informasi tersebut akan digunakan untuk analisis sebagai berikut.

##### 4.1.1 Analisis Keteramatan

Tanpa mengurangi keumuman dan menghilangkan sinyal yang berlebih, ambil output dari sensor IMU adalah

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_i = (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) \quad (4.1)$$

oleh karena itu  $\mathbf{y}_{minb}$  diberikan oleh

$$\mathbf{y}_{minb} = \Phi_b \mathbf{y}_b^* = \mathbf{I} \mathbf{y}_b^* \quad (4.2)$$

Berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$  persamaan pengukuran badan QC disusun sebagai berikut

$$\mathbf{y}_{minb} = \mathbf{H}_{b_i} \mathbf{x}_b \quad (4.3)$$

dengan  $\mathbf{H}_{b_i} = \mathbf{I}_8$ , oleh karena itu

$$\mathbf{H}_{b_i} = \mathbf{H}_b \quad (4.4)$$

Berdasarkan ini disusun lemma berikut.

**Lemma 1.** Ketika IMU sempurna, yaitu  $\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_i$ , quadcopter dapat diamati.

Bukti: Persamaan pengukuran badan QC yang diberikan pada (4.4) diubah ke dalam bentuk Jordan sebagaimana yang diberikan pada (3.46)

$$\hat{\mathbf{H}}_b = \mathbf{H}_b \mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} -1/K_{tx} & -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$\hat{\mathbf{H}}_b$  dapat dibagi ke dalam dua bagian, dengan tiap bagian berhubungan dengan nilai eigen yang berbeda pada  $\hat{\mathbf{A}}_b$ ,  $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_b &= [\hat{\mathbf{H}}_{b\lambda_{2A_b}} \quad \vdots \quad \hat{\mathbf{H}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}] \\ &= \begin{bmatrix} -1/K_{tx} & \vdots & -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kolom terakhir untuk tiap pasangan blok Jordan pada  $\hat{\mathbf{H}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}$  yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

adalah tidak bergantung secara linear, begitu juga untuk kolom  $\hat{\mathbf{H}}_{b\lambda_{1A_b}}$ . Oleh karena itu badan QC  $S_b$  adalah dapat diamati.

Untuk menjaga keteramatan rotor QC, dibutuhkan fungsi yang diberikan pada (3.93) yaitu

$$\Phi_r: \mathbf{y}_{minb} \rightarrow \mathbf{y}_r \quad (4.8)$$

$\mathbf{y}_{minb}$  diberikan pada (4.2), oleh karena itu  $\mathbf{y}_r$  dapat dihitung melalui (3.94)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{r,t_1} &= \mathbf{u}_{b,t_1} = \Phi_r(\mathbf{y}_{minb}) \\ &= \mathbf{B}'_b e^{A'_{b,t_1-t_0}} \mathbf{W}_{c,t_1}^{-1} (e^{A_{b,t_1}} \mathbf{y}_{minb,t_0} - \mathbf{y}_{minb,t_1}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

dengan lengkapnya informasi  $\mathbf{y}_r$ , persamaan pengukuran rotor QC dapat direpresentasikan sebagaimana yang diberikan pada (3.40), yaitu

$$\hat{\mathbf{H}}_r = \mathbf{H}_r \mathbf{Q}_r = \mathbf{H}_r \mathbf{I} = \mathbf{H}_r \quad (4.10)$$

Karena tiap kolom pada  $\hat{\mathbf{H}}_r$  adalah tidak nol, rotor QC  $S_r$  adalah dapat diamati.

Berdasarkan (4.5) dan (4.10), persamaan pengukuran augmentasi quadcopter  $S$  disusun sebagai berikut.

$\boldsymbol{\gamma}$  diberikan oleh (3.57), yaitu sebagai berikut

$$[\boldsymbol{\gamma}_{ij}] = \hat{\mathbf{A}}_{ij,rb}/\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b} = (\hat{\mathbf{B}}_b \hat{\mathbf{H}}_r)_{ij}/\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b} \quad (4.11)$$

dengan  $\hat{\mathbf{B}}_b$  dan  $\hat{\mathbf{H}}_r$  berurutan diberikan pada (3.45) dan (4.10) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{K_d mg} \begin{bmatrix} -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_1/m^2 \\ -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_4/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 l^2/I_x & 0 & -t_4 l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 l^2/I_y & 0 & -t_3 l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ dl/\gamma_1 & -dl/\gamma_2 & dl/\gamma_2 & -dl/\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

dengan  $\boldsymbol{\gamma}_i = K_d I_z (K_{tx} - l/t_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Substitusikan (4.5), (4.10) dan (4.12) ke dalam (3.56) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{x}} \\ &= [\hat{\mathbf{H}}_b \boldsymbol{\gamma} \quad \hat{\mathbf{H}}_b] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{H}}_b \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{K_d mg} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_4/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 l^2/I_x & 0 & -t_4 l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 l^2/I_y & 0 & -t_3 l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ dl/\gamma_1 & -dl/\gamma_2 & dl/\gamma_2 & -d/\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Tiap kolom  $\hat{\mathbf{H}}_b \boldsymbol{\gamma}$  pada (4.13) berhubungan dengan  $\lambda_{j,A_r}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58). Karena tidak ada kolom nol,  $\hat{\mathbf{x}}_r$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  dapat diamati. Sedangkan  $\hat{\mathbf{H}}_b$  pada (4.13) berhubungan dengan  $\lambda_{i,A_b}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58) dan telah ditunjukkan memenuhi syarat keteramatan, oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  dapat diamati. Karena  $\hat{\mathbf{x}}_r$  dan  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  dapat diamati,  $S$  dapat diamati.

Karena  $S_r, S_b$  dan  $S$  adalah dapat diamati, quadcopter adalah dapat diamati. Lemma 1 terbukti.

#### 4.1.2 Observer Quadcopter

Realisasi observer yang dirancang berdasarkan analisis keteramatan diberikan sebagai berikut.

Untuk observer badan QC, berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$  yang didapatkan pada (4.2),  $\mathbf{x}_b^*$  dapat dihitung melalui hubungan berikut

$$\mathbf{x}_b^* = \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{x}_b \quad (4.15)$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Berdasarkan hasil analisis, rotor QC dapat diamati karena adanya  $\Phi_r(\mathbf{y}_{minb}) = \mathbf{y}_r$  seperti hasil analisis. Oleh karena itu observer rotor QC yang dirancang dapat menghasilkan  $\mathbf{x}_r$  sebagai berikut.

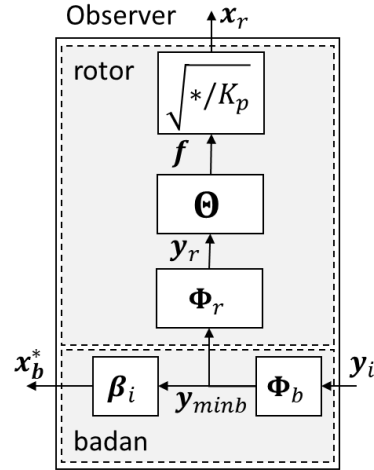
$\mathbf{y}_r$  yang dihasilkan pada (4.9) diolah untuk menghasilkan  $\mathbf{x}_r$  melalui (3.16), yaitu dengan menyelesaikan (3.14) dan (3.10) secara berurutan sebagaimana yang diberikan pada (3.74) dan (3.75), sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r &= \boldsymbol{\Theta} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{y}_r &= \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} &= \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{y}_r \end{aligned} \quad (4.17)$$

State rotor  $\mathbf{x}_r$  didapatkan dengan menyelesaikan (3.10) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{K}_d (\mathbf{x}_r)^2 \\ \mathbf{x}_r &= \pm \sqrt{\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{f}}, \mathbf{x}_r \geq 0 \\ \mathbf{x}_r &= \sqrt{\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{f}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Blok diagram Observer berdasarkan IMU sempurna diberikan oleh Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Blok diagram observer pada peran sensor IMU

#### 4.1.3 Analisis Keterkendalian Loop Tertutup

Berdasarkan perancangan observer IMU sempurna, informasi state yang diumpangkan terhadap EC dan PKR adalah lengkap, seperti yang diberikan pada (4.15) dan (4.18). Oleh karena itu disusun lemma berikut

**Lemma 2.** Ketika IMU sempurna, yaitu  $\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_i$ , maka quadcopter loop tertutup  $S_t$  adalah dapat dikendalikan

Bukti: Dengan informasi umpan balik rotor QC (4.18), loop tertutup rotor QC adalah dapat dikendalikan seperti yang ditunjukkan pada (3.96). Dengan umpan balik badan QC yang diberikan pada (4.15), matriks input badan QC adalah sama dengan yang diberikan pada (3.45)

$$\hat{\mathbf{B}}_b = \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$\hat{\mathbf{B}}_b$  dapat dibagi ke dalam dua bagian, tiap bagian berhubungan dengan nilai eigen  $\mathbf{A}_b$ , yaitu  $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$\hat{\mathbf{B}}_b = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{1A_b}} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Baris terakhir untuk tiap pasangan Blok Jordan pada  $\hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}$  yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

adalah tidak bergantung secara linear, begitu juga untuk kolom  $\hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{1A_b}}$ . Oleh karena itu badan QC  $S_b$  adalah dapat dikendalikan.

Ketika sistem rotor QC  $S_r$  dan badan QC  $S_b$  tersebut terhubung, maka berdasarkan (3.39) dan (4.19) matriks input augmentasi quadcopter  $S$  disusun sebagai berikut,

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_r \\ -\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{B}}_r \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

dengan  $\boldsymbol{\gamma}$  adalah sama dengan yang diberikan pada (4.12), sehingga diperoleh

$$-\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{B}}_r = \sqrt{K_d mg} \begin{bmatrix} K_{r1}/m^2 & K_{r2}/m^2 & K_{r3}/m^2 & K_{r4}/m^2 \\ K_{r1}/m^2 & K_{r2}/m^2 & K_{r3}/m^2 & K_{r4}/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{r2}l^2/I_x & 0 & K_{r4}l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{r1}l^2/I_y & 0 & K_{r3}l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{r2}dl/\gamma_1 & K_{r2}dl/\gamma_2 & -K_{r3}dl/\gamma_2 & K_{r4}dl/\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Tiap kolom  $\hat{\mathbf{B}}_r$  pada (4.22) berhubungan dengan  $\lambda_{jA_r}, j = 1, \dots, 4$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58).

Karena tidak ada baris nol,  $\hat{\mathbf{x}}_r$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tetap dapat dikendalikan. Sedangkan  $-\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{B}}_r$  pada (4.22) berhubungan dengan  $\lambda_{iA_b}, i = 1, \dots, 8$ , di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58) dan dapat dibagi menjadi dua bagian berdasarkan nilai  $\lambda_{iA_b}$  yang berbeda, yaitu  $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
-\mathbf{\hat{y}}\mathbf{\hat{B}}_r &= \begin{bmatrix} (-\mathbf{\hat{y}}\mathbf{\hat{B}}_r)_{\lambda_{1A_b}} \\ \dots \\ (-\mathbf{\hat{y}}\mathbf{\hat{B}}_r)_{\lambda_{(2-8)A_b}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} K_{r1}/m^2 & K_{r2}/m^2 & K_{r3}/m^2 & K_{r4}/m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{r1}/m^2 & K_{r2}/m^2 & K_{r3}/m^2 & K_{r4}/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{r2}l^2/I_x & 0 & K_{r4}l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{r1}l^2/I_y & 0 & K_{r3}l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{r2}dl/\gamma_1 & K_{r2}dl/\gamma_2 & -K_{r3}dl/\gamma_2 & K_{r4}dl/\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Baris terakhir  $(-\mathbf{\hat{y}}\mathbf{\hat{B}}_r)_{\lambda_{(2-8)A_b}}$  untuk tiap pasangan Blok Jordan  $\lambda_{(2-8)A_b}$  di  $\mathbf{\hat{A}}$  pada (3.58) yang diberikan oleh

$$\sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} K_{r1}/m^2 & K_{r2}/m^2 & K_{r3}/m^2 & K_{r4}/m^2 \\ 0 & -K_{r2}l^2/I_x & 0 & K_{r4}l^2/I_x \\ -K_{r1}l^2/I_y & 0 & K_{r3}l^2/I_y & 0 \\ -K_{r2}dl/\gamma_1 & K_{r2}dl/\gamma_2 & -K_{r3}dl/\gamma_2 & K_{r4}dl/\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

adalah tidak bergantung secara linear, begitu juga untuk kolom  $(-\mathbf{\hat{y}}\mathbf{\hat{B}}_r)_{\lambda_{1A_b}}$ . Oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tetap dapat dikendalikan. Karena  $\hat{\mathbf{x}}_r$  dan  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  dapat dikendalikan,  $S$  dapat dikendalikan.

Karena  $S_r$  dapat dikendalikan dan  $\nexists \mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}, k = 1, \dots, 4$  sehingga  $S_b$  dapat dikendalikan begitu juga  $S$ ,  $S_t$  dapat dikendalikan. Lemma 2 terbukti.

#### 4.1.4 Algoritma Penerapan Peran Sensor IMU

Berdasarkan analisis-analisis di atas, perancangan observer dan desain kontroler pada DEB dan AC dapat disusun penerapannya dalam algoritma sebagai berikut

Algoritma 1:

Input:  $T, dt, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_b^{*r}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{A}_b, \mathbf{B}_b$

Inisialisai :  $t = 0, \mathbf{x}_b(t)$

$t = t + dt$

While  $t < T$ ,

%Observer

Read  $\mathbf{y}_i(t)$

Hitung  $\mathbf{y}_i(t) = [\mathbf{y}_{i,[7:8]}(t); \mathbf{y}_{i,[10:15]}(t)] = (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})(t)$

Hitung  $\mathbf{y}_{minb}(t) = \Phi_b \mathbf{y}_i$

Read  $\mathbf{y}_{minb}(t - dt)$

Hitung

$$\mathbf{u}_b(t) = -\mathbf{B}'_b e^{A'_b(t-(t-dt))} \mathbf{W}_c^{-1}(t) [e^{A_b(t)} \mathbf{y}_{minb}(t - dt) - \mathbf{y}_{minb}(t)],$$

Hitung  $\mathbf{f}(t) = \Theta^{-1} \mathbf{u}_b(t)$

Hitung  $\mathbf{x}_r(t) = \sqrt{\mathbf{f}/K_p}$

Hitung  $\mathbf{x}_b^*(t) = \beta_i \mathbf{y}_{minb}$

%DAB&EC

%  $\mathbf{x}_b^*$  lengkap,  $\mathbf{R}^{rek} = \mathbf{I}$

Hitung  $\mathbf{e}_b^r(t) = \mathbf{x}_b^{*r}(t) - \mathbf{x}_b^*$

Hitung  $\mathbf{u}_b^r(t) = K \mathbf{R}^{rek} \mathbf{e}_b^r(t)$

Hitung  $\mathbf{f}^r(t) = \Theta^{-1} \mathbf{u}_b^r(t)$

Hitung  $\mathbf{x}_r^r(t) = \sqrt{\mathbf{f}^r/K_p}(t)$

$t = t + dt$

End

## 4.2 Peran Sensor Gyro

Ketika sensor gyro adalah sensor yang bekerja, informasi yang disediakan diberikan pada (3.78). Informasi tersebut akan digunakan untuk analisis sebagai berikut.

### 4.2.1 Analisis Keteramatan

Informasi yang diberikan oleh sensor gyro adalah diberikan pada (3.78)

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_g = (\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) \quad (4.26)$$

Karena informasi yang diberikan tidak memenuhi syarat untuk menjaga keteramatan badan QC  $\mathbf{y}_b^* \neq (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$ , dibutuhkan  $\Phi_b(\mathbf{y}_b^*) = \mathbf{y}_{minb}$  dengan dapat dipenuhi dengan memanfaatkan  $u_{b1} = mg$ , yaitu resultan gaya yang dihasilkan oleh keempat rotor untuk menjaga ketinggian dari quadcopter. Asumsi ini benar karena quadcopter adalah dalam keadaan hover. Informasi ini dapat digunakan melalui dinamika berikut



$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{1}{m} (\sin \phi \cos \theta) u_{b1} \\
&= \frac{1}{m} (\sin \phi \cos \theta) mg \\
&= (\sin \phi \cos \theta) g
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Mengetahui nilai dari  $\ddot{z}$  adalah cukup untuk mengetahui  $(z, \dot{z})$ , yaitu dengan menggunakan operasi integral,  $\dot{z} = \int \ddot{z} dt$  dan  $z = \int \int \ddot{z} dt = \int \dot{z} dt$ . Sehingga diperoleh  $\mathbf{y}_{minb}$  dari  $\mathbf{y}_b^*$  pada (4.26) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{minb} &= \Phi_b(\mathbf{y}_b^*) \\
&= \begin{bmatrix} \iint (\sin \phi \cos \theta) g dt \\ \int (\sin \phi \cos \theta) g dt \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$  tersebut, persamaan pengukuran badan QC diberikan oleh

$$\mathbf{y}_{minb} = \mathbf{H}_{bg} \mathbf{x}_b \tag{4.29}$$

dengan  $\mathbf{H}_{bg} = \mathbf{I}_8$ , oleh karena itu

$$\mathbf{H}_{bg} = \mathbf{H}_{bi} = \mathbf{H}_b, \tag{4.30}$$

Berdasarkan ini disusun lemma berikut.

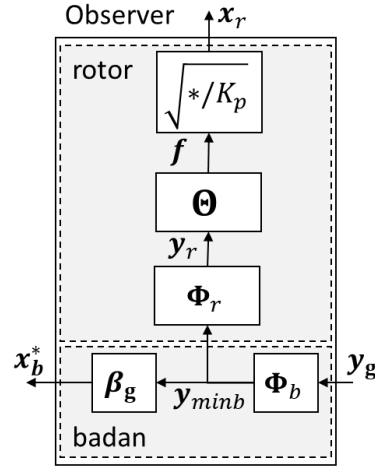
**Lemma 3.** Ketika sensor gyro yang bekerja, yaitu  $\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_g$ , quadcopter dapat diamati.

Bukti: Karena Persamaan pengukuran badan QC ketika hanya gyro yang bekerja adalah sama dengan ketika IMU sempurna, seperti yang diberikan pada (4.30), analisis untuk gyro adalah sama dengan ketika IMU sempurna, oleh karena itu  $S_r, S_b$  dan  $S$  adalah dapat diamati, sehingga quadcopter adalah dapat diamati.

Lemma 3 terbukti

#### 4.2.2 Observer Quadcopter

Realisasi observer yang dirancang berdasarkan analisis keteramatan diberikan sebagai berikut.



Gambar 4.2 Blok diagram observer pada peran sensor gyro

Untuk observer badan QC, berdasarkan  $y_{minb}$  yang didapatkan pada (4.2),  $x_b^*$  dapat dihitung melalui hubungan berikut

$$x_b^* = \beta_g y_{minb} \quad (4.31)$$

dengan  $\beta_g = \beta_i$ . Selanjutnya, proses perancangan observer quadcopter gyro adalah sama dengan perancangan observer IMU sempurna. Blok diagram observer quadcopter gyro diberikan oleh Gambar 4.2.

#### 4.2.3 Analisis Keterkendalian Loop Tertutup

Berdasarkan perancangan observer gyro, disusun lemma berikut.

**Lemma 4.** Ketika sensor gyro yang bekerja, yaitu  $y_b^* = y_g$ , maka quadcopter loop tertutup  $S_t$  adalah dapat dikendalikan

Bukti: karena informasi state yang diumpankan terhadap EC dan PKR adalah lengkap, yaitu sama seperti pada IMU sempurna, diberikan pada (4.15) dan (4.18),  $S_t$  adalah dapat dikendalikan. Lemma 4 terbukti.

#### 4.2.4 Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro

Berdasarkan analisis-analisis di atas, perancangan observer dan desain kontroler pada DEB dan AC dapat disusun penerapannya dalam algoritma sebagai berikut

Algoritma 2:

Input:  $T, dt, y_g, x_b^{*r}, \Theta, A_b, B_b$

Inisialisai :  $t = 0, x_b(t)$

$t = t + dt$

```

While  $t < T$ ,
    %Observer
    Read  $\mathbf{y}_g(t)$ 
    Hitung  $\mathbf{y}_{minb}(t) = \Phi_b(\mathbf{y}_g(t))$ 
    Read  $\mathbf{y}_{minb}(t - dt)$ 
    Hitung
        
$$\mathbf{u}_b(t) = -\mathbf{B}_b' e^{A_b'(t-(t-dt))} W_c^{-1}(t) [e^{A_b(t)} \mathbf{y}_{minb}(t - dt) - \mathbf{y}_{minb}(t)],$$

    Hitung  $\mathbf{f}(t) = \Theta^{-1} \mathbf{u}_b(t)$ 
    Hitung  $\mathbf{x}_r(t) = \sqrt{\mathbf{f}/K_p}$ 
    Hitung  $\mathbf{x}_b^*(t) = \beta_g \mathbf{y}_{minb}$ 
    %DAB&EC
    %  $\mathbf{x}_b^*$  lengkap,  $\mathbf{R}^{rek} = \mathbf{I}$ 
    Hitung  $\mathbf{e}_b^r(t) = \mathbf{x}_b^{*r}(t) - \mathbf{x}_b^*$ 
    Hitung  $\mathbf{u}_b^r(t) = K \mathbf{R}^{rek} \mathbf{e}_b^r(t)$ 
    Hitung  $\mathbf{f}^r(t) = \Theta^{-1} \mathbf{u}_b^r(t)$ 
    Hitung  $\mathbf{x}_r^r(t) = \sqrt{\mathbf{f}^r/K_p}(t)$ 
     $t = t + dt$ 
End

```

### 4.3 Peran Sensor Accelero

Ketika sensor gyro adalah sensor yang bekerja, informasi yang disediakan diberikan pada (3.79). Informasi tersebut akan digunakan untuk analisis sebagai berikut.

#### 4.3.1 Analisis Keteramatan

Informasi yang diberikan oleh sensor accelero adalah seperti yang diberikan pada (3.79)

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_a = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (4.32)$$

Karena informasi yang diberikan tidak memenuhi syarat untuk menjaga keteramatan badan QC  $\mathbf{y}_b^* \neq (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$ , dibutuhkan  $\Phi_b(\mathbf{y}_b^*) = \mathbf{y}_{minb}$  sebagai berikut.

$(\phi, \theta)$  dapat disediakan dengan memanfaatkan informasi tersebut untuk menghitung pergeseran (*tilting*) quadcopter relatif terhadap bumi [34]. Ambil data pengukuran accelero setelah normalisasi adalah [35]

$$\frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) dapat digunakan untuk menghitung nilai dari  $\phi$  dan  $\theta$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \tan \phi &= [a_y/a_z] \\ \phi &= \tan^{-1}[a_y/a_z] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= [-a_x/(a_y \sin \phi + a_z \cos \phi)] = -a_x/\sqrt{a_y^2 + a_z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}[-a_x/\sqrt{a_y^2 + a_z^2}] \end{aligned} \quad (4.35)$$

$\dot{\phi}$  dan  $\dot{\theta}$  diperoleh melalui turunan, yaitu  $\dot{\phi} = d\phi/dt$  dan  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ . (4.34)-(4.35) bisa dilakukan ketika kondisi berikut terpenuhi:

- Accelero tidak mengalami percepatan
- Sumbu-z kerangka badan quadcopter sejajar dengan bidang gravitasi bumi,

Asumsi-asumsi ini benar karena quadcopter yang dipelajari adalah pada keadaan hover. Sehingga diperoleh  $\mathbf{y}_{minb}$  dari  $\mathbf{y}_b^*$  pada (4.32) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{minb} &= \Phi_b(\mathbf{y}_b^*) \\ &= \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \tan^{-1}[a_y/a_z] \\ d(\tan^{-1}[a_y/a_z])/dt \\ \tan^{-1}[-a_x/\sqrt{a_y^2 + a_z^2}] \\ d\left(\tan^{-1}[-a_x/\sqrt{a_y^2 + a_z^2}]\right)/dt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nol pada dua baris terakhir menunjukkan tidak tersedianya  $(\psi, \dot{\psi})$ . Berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$  pada (4.36) disusun persamaan pengukuran badan QC sebagai berikut

$$\mathbf{y}_{minb} = \mathbf{H}_{ba} \mathbf{x}_b \quad (4.37)$$

dengan  $\mathbf{H}_{ba} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 6} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ . Karena  $\mathbf{H}_{ba} \neq \mathbf{H}_b$ ,  $\mathbf{H}_{ba}$  dapat ditulis ulang sebagai

$$\mathbf{H}_{ba} = \mathbf{H}_b^* = \delta_b \mathbf{H}_b \quad (4.38)$$

Kegagalan terjadi pada  $k = 7, 8$ . Berdasarkan ini disusun lemma berikut.

**Lemma 5.** Ketika sensor accelero yang bekerja, yaitu  $\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_a$  quadcopter tidak dapat diamati, tetapi keteramatan rotor tetap terjaga.

Bukti: Persamaan pengukuran badan QC yang diberikan pada (4.38) diubah ke dalam bentuk Jordan sebagaimana yang diberikan pada (3.46)

$$\hat{\mathbf{H}}_b^* = \mathbf{H}_b^* \mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} -1/K_{tx} & -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$\hat{\mathbf{H}}_b^*$  dapat dibagi ke dalam dua bagian, dengan tiap bagian berhubungan dengan nilai eigen yang berbeda pada  $\hat{\mathbf{A}}_b$ ,  $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_b^* &= [\hat{\mathbf{H}}_{ba\lambda_{2A_b}} \quad \vdots \quad \hat{\mathbf{H}}_{ba\lambda_{(2-8)A_b}}] \\ &= \begin{bmatrix} -1/K_{tx} & \vdots & -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Kolom terakhir untuk tiap pasangan Blok Jordan pada  $\hat{\mathbf{H}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}^*$  yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} -1/K_{tx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

adalah bergantung secara linear, karena terdapat kolom nol. Oleh karena itu badan QC  $S_b$  adalah tidak dapat diamati.

Untuk menjaga keteramatan rotor QC, dibutuhkan fungsi yang diberikan pada (3.93) yaitu

$$\Phi_b: \mathbf{y}_{minb} \rightarrow \mathbf{y}_r \quad (4.42)$$

dengan  $\mathbf{y}_{minb}$  pada (4.36),  $\mathbf{y}_r$  dapat dihitung menggunakan (3.94) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{r,t_1} &= \mathbf{u}_{b,t_1} = \Phi_b(\mathbf{y}_{minb}) \\ &= \mathbf{B}_b' e^{A_{b,t_1-t_0}} \mathbf{W}_{c,t_1}^{-1} (e^{A_{b,t_1}} \mathbf{y}_{minb,t_0} - \mathbf{y}_{minb,t_1}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Baris terakhir,  $k = 4$  pada  $\mathbf{y}_r$  adalah nol, yaitu tidak tersedia oleh pengukuran. Oleh karena itu ditulis sebagai

$$\mathbf{y}_r^* = \delta_r \mathbf{y}_r \quad (4.44)$$

Perubahan ini menyebabkan perubahan  $\mathbf{H}_r$  dan diberikan oleh

$$\mathbf{H}_r^* = \delta_b^+ \mathbf{H}_r = \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & -l & 0 & l \\ -l & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Perubahan  $\mathbf{H}_r$  menyebabkan perubahan  $\hat{\mathbf{H}}_r$  pada (3.40), yaitu

$$\hat{\mathbf{H}}_r^* = \mathbf{H}_r^* \mathbf{Q}_r = \mathbf{H}_r^* \mathbf{I} = \mathbf{H}_r^* \quad (4.46)$$

Karena tiap kolom pada  $\hat{\mathbf{H}}_r^*$  adalah tidak nol,  $S_r$  adalah dapat diamati.

Berdasarkan (4.46) dan (4.39), persamaan pengukuran augmentasi quadcopter  $S$  mengalami perubahan dan disusun sebagai berikut.

$\mathbf{y}$  dapat dihitung sebagai

$$[\mathbf{y}_{ij}] = \frac{\hat{\mathbf{A}}_{ij,rb}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} = \frac{(\hat{\mathbf{B}}_b \hat{\mathbf{H}}_r^*)_{ij}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} = \frac{(\hat{\mathbf{B}}_b \delta_b^+ \mathbf{H}_r)_{ij}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} \quad (4.47)$$

dengan  $\hat{\mathbf{B}}_b$  dan  $\hat{\mathbf{H}}_r^*$  berurutan diberikan pada (3.45) dan (4.46) sehingga diperoleh

$$\mathbf{y} = \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_1/m^2 \\ -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_4/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 l^2 / I_x & 0 & -t_4 l^2 / I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 l^2 / I_y & 0 & -t_3 l^2 / I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Substitusikan (4.46) dan (4.48) ke dalam (3.56) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{H}}_b^* \hat{\mathbf{x}} \\ &= [\hat{\mathbf{H}}_b^* \boldsymbol{\gamma} \quad \hat{\mathbf{H}}_b^*] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

dengan

$$\hat{\mathbf{H}}_b^* \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_1/m^2 & -t_2/m^2 & -t_3/m^2 & -t_4/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 l^2/I_x & 0 & -t_4 l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 l^2/I_y & 0 & -t_3 l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Tiap kolom  $\hat{\mathbf{H}}_b^* \boldsymbol{\gamma}$  berhubungan dengan  $\lambda_{jA_r}, j = 1, 2, 3, 4$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58).

Karena tidak ada kolom nol,  $\hat{\mathbf{x}}_r$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  dapat diamati. Sedangkan tiap kolom  $\hat{\mathbf{H}}_b^* \boldsymbol{\gamma}$  berhubungan dengan  $\lambda_{iA_b}, i = 1, 2, \dots, 8$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58) dan telah ditunjukkan tidak memenuhi syarat keteramatan, oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak dapat diamati. Walaupun  $\hat{\mathbf{x}}_r$  dapat diamati dan  $\hat{\mathbf{x}}_b$  tidak dapat diamati, oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak dapat diamati. Lemma 5 terbukti.

### 4.3.2 Observer Quadcopter

Realisasi observer yang dirancang berdasarkan analisis keteramatan diberikan sebagai berikut.

Untuk observer badan, berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$  yang didapatkan pada (4.36),  $\mathbf{x}_b^*$  dapat dihitung melalui hubungan berikut

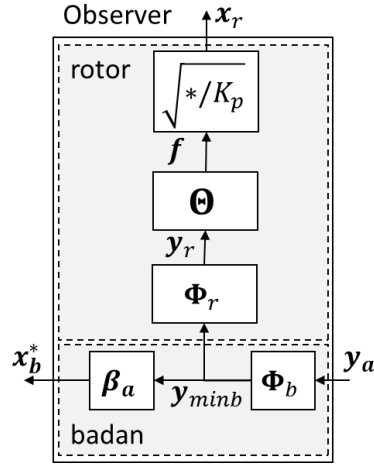
$$\mathbf{x}_b^* = \boldsymbol{\beta}_a \mathbf{y}_{minb} \quad (4.51)$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Baris terakhir pada  $\mathbf{x}_b^*$  tidak dapat dihitung, yaitu  $\mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}, k = 4$ .

Berdasarkan hasil analisis, rotor dapat diamati karena adanya  $\boldsymbol{\Phi}_r(\mathbf{y}_{minb}) = \mathbf{y}_r$  seperti hasil analisis. Oleh karena itu observer rotor yang dirancang dapat menghasilkan  $\mathbf{x}_r$  sebagai berikut.



Gambar 4.3 Blok diagram observer pada peran sensor accelero

$y_r$  yang dihasilkan pada (4.43) diolah untuk menghasilkan  $x_r$  melalui (3.16), yaitu dengan menyelesaikan (3.14) dan (3.10) secara berurutan sebagaimana yang diberikan pada (3.74) dan (3.75), sebagai berikut.

$y_r$  yang dihasilkan adalah tidak lengkap dan diberikan pada (4.44), substitusikan terhadap (3.14) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\delta_r y_r &= \Theta f \\ \Theta^{-1} \delta_r y_r &= \Theta^{-1} \Theta f \\ f &= \Theta^{-1} \delta_r y_r\end{aligned}\tag{4.53}$$

State rotor  $x_r$  didapatkan dengan menyelesaikan (3.10) sebagai berikut

$$\begin{aligned}f &= K_d (x_r)^2 \\ x_r &= \pm \sqrt{K_d^{-1} f}, x_r \geq 0 \\ x_r &= \sqrt{K_d^{-1} f}\end{aligned}\tag{4.54}$$

Blok diagram Observer berdasarkan sensor accelero diberikan oleh Gambar 4.3.

#### 4.3.3 Analisis Keterkendalian Loop Tertutup

Berdasarkan perancangan observer sensor, informasi state yang diumpankan terhadap PKR adalah lengkap sedangkan terhadap EC adalah tidak lengkap, seperti yang diberikan pada (4.54) dan (4.51). Oleh karena itu disusun lemma berikut

**Lemma 6.** Ketika sensor accelero yang bekerja, yaitu  $y_b^* = y_a$ , maka quadcopter loop tertutup  $S_t$  adalah tidak dapat dikendalikan



Bukti: Dengan informasi umpan balik rotor (4.54), loop tertutup rotor adalah dapat dikendalikan seperti yang ditunjukkan pada (3.96), sedangkan umpan balik badan yang diberikan pada (4.51) adalah tidak lengkap, oleh karena itu matriks input badan adalah mengalami perubahan dan diberikan oleh (3.100), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}_b^* &= \hat{\mathbf{B}}_b \mathbf{R}^{rek} = \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{B}_b \mathbf{R}^{rek} \\ &= \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.55)$$

$\hat{\mathbf{B}}_b^*$  dapat dibagi ke dalam dua bagian, dengan tiap bagian berhubungan dengan nilai eigen  $\mathbf{A}_b$   $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$\hat{\mathbf{B}}_b^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{1A_b}}^* \\ \dots \\ \hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (4.56)$$

dengan baris terakhir untuk tiap pasangan Blok Jordan pada  $\hat{\mathbf{B}}_{b\lambda_{(2-8)A_b}}^*$  yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (4.57)$$

adalah bergantung secara linear, karena terdapat baris nol. Oleh karena itu badan quadcopter  $S_b$  adalah tidak dapat dikendalikan.

Ketika sistem rotor  $S_r$  dan badan  $S_b$  tersebut terhubung, maka berdasarkan (3.39) dan (4.55) matriks input augmentasi quadcopter  $S$  disusun sebagai berikut,

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_r^* \\ -\mathbf{Y}\hat{\mathbf{B}}_r^* \end{bmatrix}\quad (4.58)$$

dengan  $\mathbf{y}$  dihitung sebagai

$$[\mathbf{y}_{ij}] = \frac{\hat{\mathbf{A}}_{ij,rb}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} = \frac{(\hat{\mathbf{B}}_b^* \hat{\mathbf{H}}_r)_{ij}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} = \frac{(\mathbf{B}_b \mathbf{R}^{rek} \hat{\mathbf{H}}_r)_{ij}}{\lambda_{j,A_r} - \lambda_{i,A_b}} \quad (4.59)$$

Karena  $\mathbf{R}^{rek} = \boldsymbol{\delta}_b^+$  sedangkan  $\hat{\mathbf{B}}_b$  dan  $\hat{\mathbf{H}}_r$  berurutan diberikan pada (3.45) dan (4.10),  $[\mathbf{y}_{ij}]$  pada (4.59) adalah sama dengan (4.48), yaitu

$$-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r = \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 \\ K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_p l^2/I_x & 0 & -K_p l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_p l^2/I_y & 0 & K_p l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Tiap kolom  $\hat{\mathbf{B}}_r^*$  pada (4.57) berhubungan dengan  $\lambda_{j,A_r}, j = 1, \dots, 4$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58). Karena tidak ada baris nol,  $\hat{\mathbf{x}}_r$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tetap dapat dikendalikan. Sedangkan  $-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r$  pada (4.57) berhubungan dengan  $\lambda_{i,A_b}, i = 1, \dots, 8$ , di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58) dan dapat dibagi menjadi dua bagian berdasarkan nilai  $\lambda_{i,A_b}$  yang berbeda, yaitu  $\lambda_{1A_b}$  dan  $\lambda_{2A_b} = \dots = \lambda_{8A_b}$  sebagai berikut

$$-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r = \begin{bmatrix} (-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r)_{\lambda_{1A_b}} \\ \dots \\ (-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r)_{\lambda_{(2-8)A_b}} \end{bmatrix} = \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_p l^2/I_x & 0 & -K_p l^2/I_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_p l^2/I_y & 0 & K_p l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Baris terakhir  $(-\mathbf{y} \hat{\mathbf{B}}_r)_{\lambda_{(2-8)A_b}}$  untuk tiap pasangan Blok Jordan  $\lambda_{(2-8)A_b}$  di  $\hat{\mathbf{A}}$  pada (3.58) yang diberikan oleh

$$= \sqrt{K_p mg} \begin{bmatrix} K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 & K_p/m^2 \\ 0 & -K_p l^2/I_x & 0 & -K_p l^2/I_x \\ -K_p l^2/I_y & 0 & K_p l^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

adalah bergantung secara linear, oleh karena itu  $\hat{\mathbf{x}}_b$  pada  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak dapat dikendalikan. Walaupun  $\hat{\mathbf{x}}_r$  dapat dikendalikan dan  $\hat{\mathbf{x}}_b$  tidak dapat dikendalikan. Walaupun  $S_r$  dapat dikendalikan, tapi  $\nexists \mathbf{x}_{b_k}^* = \{0\}, k = 4$  sehingga  $S_b$  tidak dapat dikendalikan begitu juga  $S$ , oleh karena itu  $S_t$  tidak dapat dikendalikan. Lemma 6 terbukti.

#### 4.3.4 Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro

Berdasarkan analisis-analisis di atas perancangan observer dan desain kontroler pada DEB dan AC dapat disusun penerapannya dalam algoritma sebagai berikut

Algoritma 3:

Input:  $T, dt, \mathbf{y}_g, \mathbf{x}_b^{*r}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{A}_b, \mathbf{B}_b$

Inisialisai :  $t = 0, \mathbf{x}_b(t)$

$t = t + dt$

While  $t < T$ ,

    %Observer

    Read  $\mathbf{y}_g(t)$

    Hitung  $\mathbf{y}_{minb}(t) = \mathbf{\Phi}_b(\mathbf{y}_g(t))$

    Read  $\mathbf{y}_{minb}(t - dt)$

    Hitung

$$\mathbf{u}_b(t) = -\mathbf{B}_b' e^{\mathbf{A}_b'(t-(t-dt))} \mathbf{W}_c^{-1}(t) [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_b(t)} \mathbf{y}_{minb}(t - dt) - \mathbf{y}_{minb}(t)],$$

    Hitung  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{u}_b(t)$

    Hitung  $\mathbf{x}_r(t) = \sqrt{\mathbf{f}/\mathbf{K}_p}$

    Hitung  $\mathbf{x}_b^*(t) = \mathbf{\beta}_a \mathbf{y}_{minb}$

    %DAB&EC

    Hitung  $\mathbf{e}_b^r(t) = \mathbf{x}_b^{*r}(t) - \mathbf{x}_b^*$

    Hitung  $\mathbf{u}_b^r(t) = \mathbf{K} \mathbf{R}^{rek} \mathbf{e}_b^r(t)$

    Hitung  $\mathbf{f}^r(t) = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{u}_b^r(t)$

    Hitung  $\mathbf{x}_r^r(t) = \sqrt{\mathbf{f}^r/\mathbf{K}_p}(t)$

$t = t + dt$ ,

End

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB 5

### PERAN GPS PADA KETERAMATAN DAN KETERKENDALIAN SISTEM QUADCOPTER

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai analisis keteramatan dan keterkendalian dari sistem quadcopter dengan hanya GPS-receiver yang dipertimbangkan sebagai sensor yang digunakan atau dipasang pada badan quadcopter. Analisis terdiri dari dua bagian, yaitu analisis keteramatan dan analisis keterkendalian loop tertutup.

#### 5.1 Peran GPS-receiver

Ketika GPS-receiver adalah sensor yang bekerja, informasi yang disediakan diberikan pada (3.65). Informasi tersebut akan digunakan untuk analisis sebagai berikut.

##### 5.1.1 Analisis Keteramatan

Informasi yang diberikan oleh sensor accelero adalah seperti yang diberikan pada (3.65)

$$\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_g = (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (5.1)$$

Karena informasi yang diberikan tidak memenuhi syarat untuk menjaga keteramatan badan quadcopter  $\mathbf{y}_b^* \neq (z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$ , dibutuhkan  $\Phi_b(\mathbf{y}_b^*) = \mathbf{y}_{minb}$  sebagai berikut.

Informasi state yang lain, yaitu  $(\phi, \theta)$  didapatkan melalui hubungan dinamika translasi badan seperti yang diberikan pada (2.37) sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \left( \begin{bmatrix} -K_{tx}\dot{x} \\ -K_{ty}\dot{y} \\ (-K_{tz}\dot{z}/m) - g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi S_\phi C_\phi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta C_\phi \end{bmatrix} u_{b1} \right) \quad (5.2)$$

Persamaan di atas dapat diselesaikan secara analitis dengan menambahkan asumsi bahwa *heading* quadcopter,  $\psi$ , selalu diketahui. Asumsi ini benar ketika GPS-receiver adalah multi-antena atau terdapat dua GPS-receiver pada badan quadcopter seperti yang diberikan pada [36]. Sehingga (5.2) dapat diselesaikan sebagai berikut.

Ambil  $C_\psi = a$  dan  $S_\psi = b$ , dan  $u_{b1} \approx mg$ . Persamaan (5.2) dapat disederhanakan dengan mengabaikan baris terakhir pada persamaan tersebut karena redundan.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} &= \frac{mg}{m} \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\theta C_\phi \\ S_\phi \end{bmatrix} \\
&= g \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\theta C_\phi \\ S_\phi \end{bmatrix} \\
&= g \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 2ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\theta C_\phi \\ S_\phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

didapatkan

$$\begin{aligned}
g2ab \sin \phi &= \ddot{y} \\
\phi &= \sin^{-1}(\ddot{y}/2gab)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$ga \sin \theta \cos \phi = \ddot{x}$$

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \frac{\ddot{x}}{g \cos(\sin^{-1}(\sin^{-1}(\ddot{y}/2gab)))} \\
\theta &= \sin^{-1} \left( \frac{\ddot{x}}{g \cos(\sin^{-1}(\sin^{-1}(\ddot{y}/2gab)))} \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  dan  $\dot{\psi}$  diperoleh melalui turunan yaitu  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ ,  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  dan  $\dot{\psi} = d\psi/dt$ . Sehingga diperoleh  $\mathbf{y}_{minb}$  dari  $\mathbf{y}_b^*$  pada (5.1) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{minb} &= \Phi_b(\mathbf{y}_b^*) \\
&= \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \sin^{-1}(\ddot{y}/2gab) \\ d(\sin^{-1}(\ddot{y}/2gab))/dt \\ \sin^{-1}(\ddot{x}/g \cos(\sin^{-1}(\sin^{-1}(\ddot{y}/2gab)))) \\ d(\sin^{-1}(\ddot{x}/g \cos(\sin^{-1}(\sin^{-1}(\ddot{y}/2gab))))/dt \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Berdasarkan  $\mathbf{y}_{minb}$ , persamaan pengukuran badan diberikan oleh

$$\mathbf{y}_{minb} = \mathbf{H}_{b_s} \mathbf{x}_b \tag{5.7}$$

dengan  $\mathbf{H}_{b_s} = \mathbf{I}_8$ , oleh karena itu

$$\mathbf{H}_{b_s} = \mathbf{H}_{b_i} = \mathbf{H}_b \tag{5.8}$$

Berdasarkan ini disusun lemma berikut.

**Lemma 7.** Ketika GPS-receiver yang bekerja, yaitu  $\mathbf{y}_b^* = \mathbf{y}_s$ , quadcopter dapat diamati.

Bukti: Karena Persamaan pengukuran badan quadcopter ketika hanya GPS-receiver yang bekerja adalah sama dengan ketika IMU sempurna, seperti yang diberikan

pada (5.8), analisis untuk gyro adalah sama dengan ketika IMU sempurna, oleh karena itu  $S_r, S_b$  dan  $S$  adalah dapat diamati, sehingga quadcopter adalah dapat diamati. Lemma 7 terbukti

### 5.1.2 Observer Quadcopter

Realisasi observer yang dirancang berdasarkan analisis keteramatan diberikan sebagai berikut.

Untuk observer badan, berdasarkan  $y_{minb}$  yang didapatkan pada (5.6),  $x_b^*$  dapat dihitung melalui hubungan berikut

$$x_b^* = \beta_s y_{minb} \quad (5.9)$$

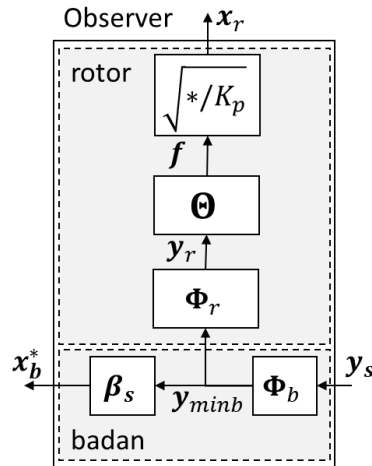
dengan  $\beta_s = \beta_i$ . Selanjutnya, proses perancangan observer quadcopter GPS-receiver adalah sama dengan perancangan observer IMU sempurna. Blok diagram observer quadcopter GPS-receiver diberikan oleh Gambar 5.1.

### 5.1.3 Analisis Keterkendalian Loop Tertutup

Berdasarkan perancangan observer GPS-receiver, disusun lemma berikut.

**Lemma 8.** Ketika GPS-receiver yang bekerja, yaitu  $y_b^* = y_s$ , maka quadcopter loop tertutup  $S_t$  adalah dapat dikendalikan

Bukti: karena informasi state yang diumpankan terhadap EC dan PKR adalah lengkap, yaitu sama seperti pada IMU sempurna, diberikan pada (4.15) dan (4.18),  $S_t$  adalah dapat dikendalikan. Lemma 8 terbukti.



Gambar 5.1 Blok diagram observer pada peran GPS-receiver

#### 5.1.4 Algoritma Penerapan Peran Sensor Gyro

Berdasarkan analisis- analisis di atas perancangan observer dan desain kontroler pada DEB dan AC dapat disusun penerapannya dalam algoritma sebagai berikut

Algoritma 4:

Input:  $T, dt, \mathbf{y}_g, \mathbf{x}_b^{*r}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{A}_b, \mathbf{B}_b$

Inisialisai :  $t = 0, \mathbf{x}_b(t)$

$t = t + dt$

While  $t < T$ ,

    %Observer

    Read  $\mathbf{y}_g(t)$

    Hitung  $\mathbf{y}_{minb}(t) = \mathbf{\Phi}_b(\mathbf{y}_g(t))$

    Read  $\mathbf{y}_{minb}(t - dt)$

    Hitung

$$\mathbf{u}_b(t) = -\mathbf{B}_b' e^{\mathbf{A}_b'(t-(t-dt))} \mathbf{W}_c^{-1}(t) [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_b(t)} \mathbf{y}_{minb}(t - dt) - \mathbf{y}_{minb}(t)],$$

    Hitung  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{u}_b(t)$

    Hitung  $\mathbf{x}_r(t) = \sqrt{\mathbf{f}/\mathbf{K}_p}$

    Hitung  $\mathbf{x}_b^*(t) = \mathbf{\beta}_s \mathbf{y}_{minb}$

    %DAB&EC

    %  $\mathbf{x}_b^*$  lengkap,  $\mathbf{R}^{rek} = \mathbf{I}$

    Hitung  $\mathbf{e}_b^r(t) = \mathbf{x}_b^{*r}(t) - \mathbf{x}_b^*$

    Hitung  $\mathbf{u}_b^r(t) = \mathbf{K} \mathbf{R}^{rek} \mathbf{e}_b^r(t)$

    Hitung  $\mathbf{f}^r(t) = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{u}_b^r(t)$

    Hitung  $\mathbf{x}_r^r(t) = \sqrt{\mathbf{f}^r/\mathbf{K}_p}(t)$

$t = t + dt$

End



## BAB 6

### VALIDASI

Untuk memvalidasi hasil teoritis, yaitu beberapa lemma yang telah dihasilkan pada bab-bab sebelumnya, dilakukan beberapa simulasi berdasarkan semua kondisi atau variasi kerusakan sensor. Beberapa parameter quadcopter yang digunakan untuk simulasi sebagian diambil dari [15] seperti yang diberikan pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Parameter simulasi quadcopter

No.	Parameter	Satuan	Nilai
1	$g$	$m/s^2$	9.81
2	$m$	Kg	1.5
3	$I_x = I_y$	$Kgm^2$	0.03
4	$I_z$	$Kgm^2$	0.04
5	$l$	m	0.2
6	$d$	m	1.7783
8	$K_d$	$Ns^2$	$1.3678 \cdot 10^{-5}$
9	$K_{tx}$	$N/m/s$	$6.543 \cdot 10^{-5}$

#### 6.1 Validasi Hasil analisis peran sensor IMU

Subbab ini memuat hasil simulasi dari sensor IMU, yaitu ketika

- IMU sempurna
- Sensor gyro yang bekerja
- Sensor accelero yang bekerja
- GPS-receiver yang bekerja

Analisis yang dilakukan terhadap IMU sempurna dan sensor gyro menghasilkan kesimpulan yang sama. Oleh karena itu simulasi untuk kedua kondisi tersebut menjadi satu.

##### 6.1.1 Peran IMU Sempurna dan Sensor Gyro

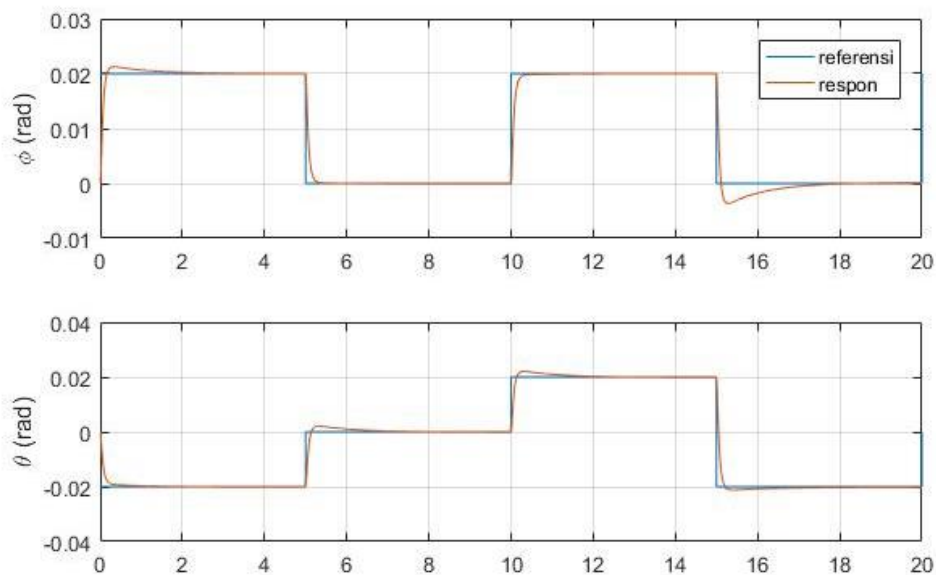
Simulasi pertama adalah ketika IMU sempurna atau sensor gyro yang digunakan. Parameter uji yang digunakan diberikan pada Tabel 6.2. Gain  $K_b$  dan  $K_p$  dipilih supaya respons sistem relatif cepat dan stabil. Sinyal referensi

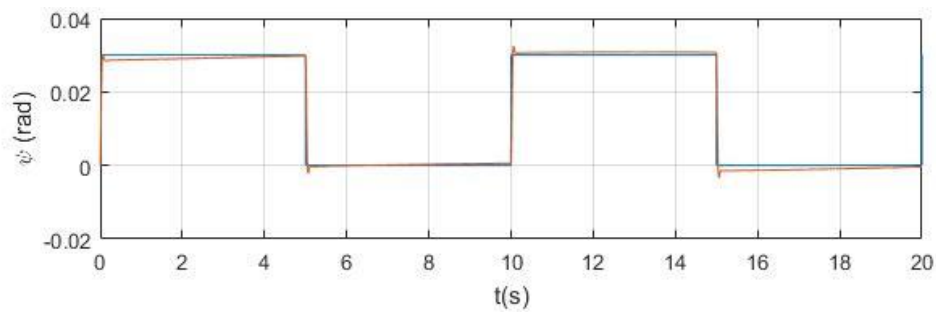
sudut Euler berupa nilai periodik dengan periode 5 detik. Sedangkan ketinggian hover dari quadcopter dijaga pada 20 m.

Tabel 6.2 Parameter uji simulasi IMU sempurna dan sensor gyro

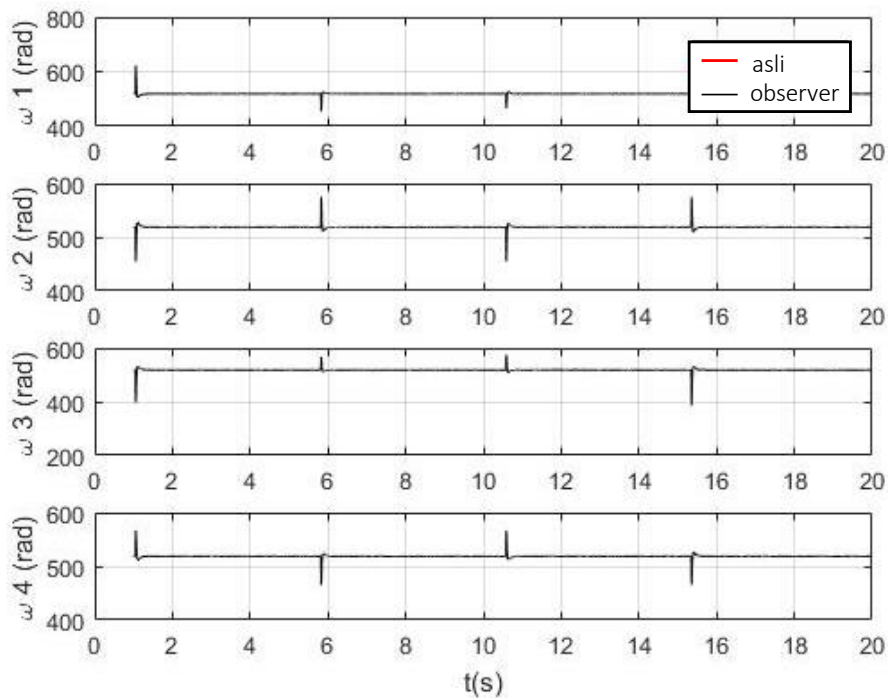
No.	Parameter / Sinyal Referensi		Satuan	Nilai	Periode
1	$K_{b1}$	$K_{bp}$	-	3	-
		$K_{bi}$	-	2	-
		$K_{bd}$	-	2.1	-
2	$K_{b2} = \dots = K_{b4}$	$K_{bp}$	-	0.2	-
		$K_{bi}$	-	0.01	-
		$K_{bd}$	-	0.2	-
3	$K_{p1} = \dots = K_{p4}$	$K_{pp}$	-	1000	-
		$K_{pi}$	-	100	-
		$K_{pd}$	-	0	-
4	$z^r$		m	20	-
5	$\phi^r$		rad	[0.02 0]	5 detik
6	$\theta^r$		rad	[-0.02 0 0.02]	5 detik
7	$\psi^r$		rad	[0.03 0]	5 detik

Respons sistem untuk sudut euler diberikan pada Gambar 6.1. Pada respons sudut roll,  $\phi$ , walaupun di awal perpindahan nilai terdapat *overshoot*, respons sistem langsung stabil dan menuju nilai yang diinginkan, menandakan bahwa umpan balik dari observer yang dirancang berdasarkan analisis adalah berhasil. Begitu juga untuk sudut pitch dan yaw,  $\theta$  dan  $\psi$ . Oleh karena itu lemma 1-4 tervalidasi.





Gambar 6.1 Respon sudut euler untuk IMU sempurna atau sensor gyro

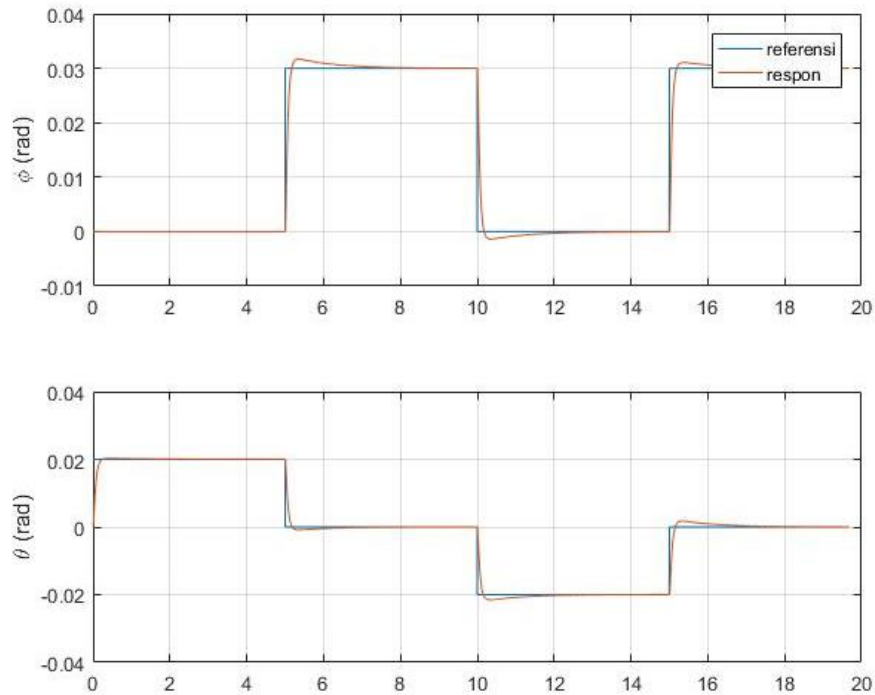


Gambar 6.2 Hasil perhitungan state rotor

Hasil perbandingan state-state rotor sesungguhnya dan hasil perhitungan dari observer diberikan pada Gambar 6.2. Dikarenakan kedua grafik tersebut bertumpuk, yang dapat dilihat pada gambar hanya satu grafik, yaitu grafik respons state rotor yang sesungguhnya. Hasil ini menunjukkan bahwa algoritma yang disusun dapat menghitung state-state rotor.

### 6.1.2 Peran Sensor Scclero

Simulasi yang kedua adalah ketika sensor gyro yang digunakan. Prosedur adalah mirip dengan yang dilakukan pada IMU sempurna atau sensor gyro perbedaan terletak pada pengendalian sudut yaw dihilangkan, karena sudut yaw



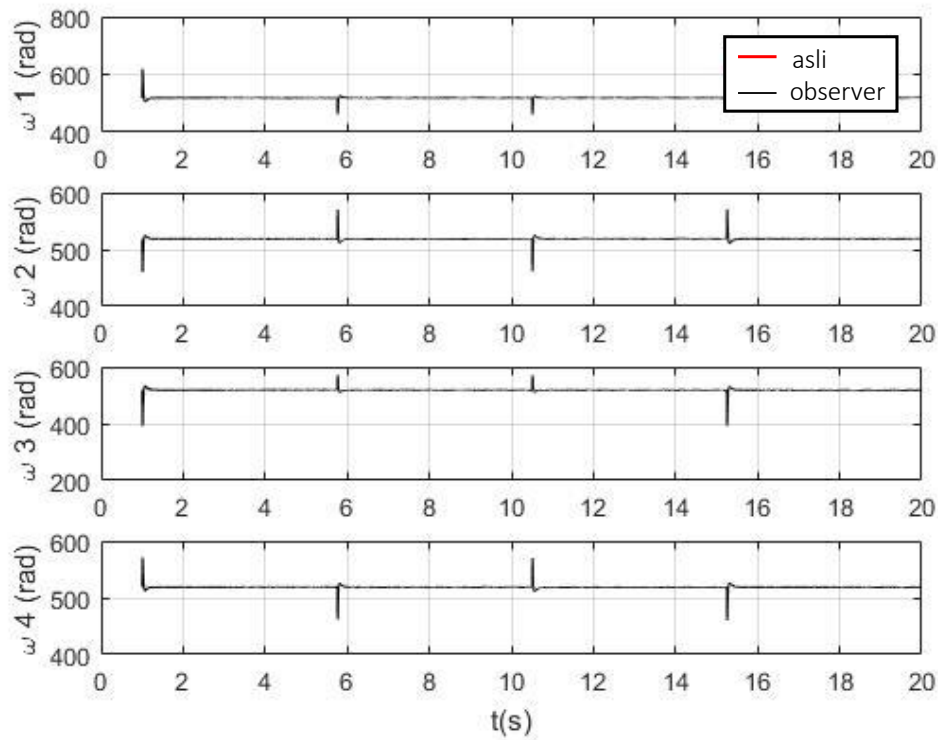
Gambar 6.3 Respons sudut Euler untuk sensor accelero

ketika sensor accelero digunakan tidak tersedia untuk diumpan balikkan. Parameter uji yang digunakan diberikan pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3 Parameter uji simulasi sensor accelero

No.	Parameter / Sinyal Referensi		Satuan	Nilai	Periode
1	$K_{b1}$	$K_{bp}$	-	3	-
		$K_{bi}$	-	2	-
		$K_{bd}$	-	2.1	-
2	$K_{b2} = \dots = K_{b4}$	$K_{bp}$	-	0.2	-
		$K_{bi}$	-	0.01	-
		$K_{bd}$	-	0.2	-
3	$K_{p1} = \dots = K_{p4}$	$K_{pp}$	-	1000	-
		$K_{pi}$	-	100	-
		$K_{pd}$	-	0	-
4	$z^r$		m	20	-
5	$\phi^r$		rad	[0 0.03]	5 detik
6	$\theta^r$		rad	[0.02 0 -0.02]	5 detik

Respons sistem untuk sudut euler diberikan pada Gambar 6.3. Pada respons sudut roll,  $\phi$ , respons sistem stabil dan menuju nilai yang diinginkan, menandakan bahwa umpan balik dari observer yang dirancang berdasarkan analisis



Gambar 6.4 Hasil perhitungan state rotor

adalah berhasil. Begitu juga untuk sudut pitch dan yaw,  $\theta$  dan  $\psi$ . Oleh karena itu lemma 5-6 tervalidasi. Sedangkan hasil perbandingan state-state rotor sesungguhnya dan hasil perhitungan dari observer diberikan pada Gambar 6.4 Hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma yang diajukan mampu menghitung state-state rotor yang sesuai.

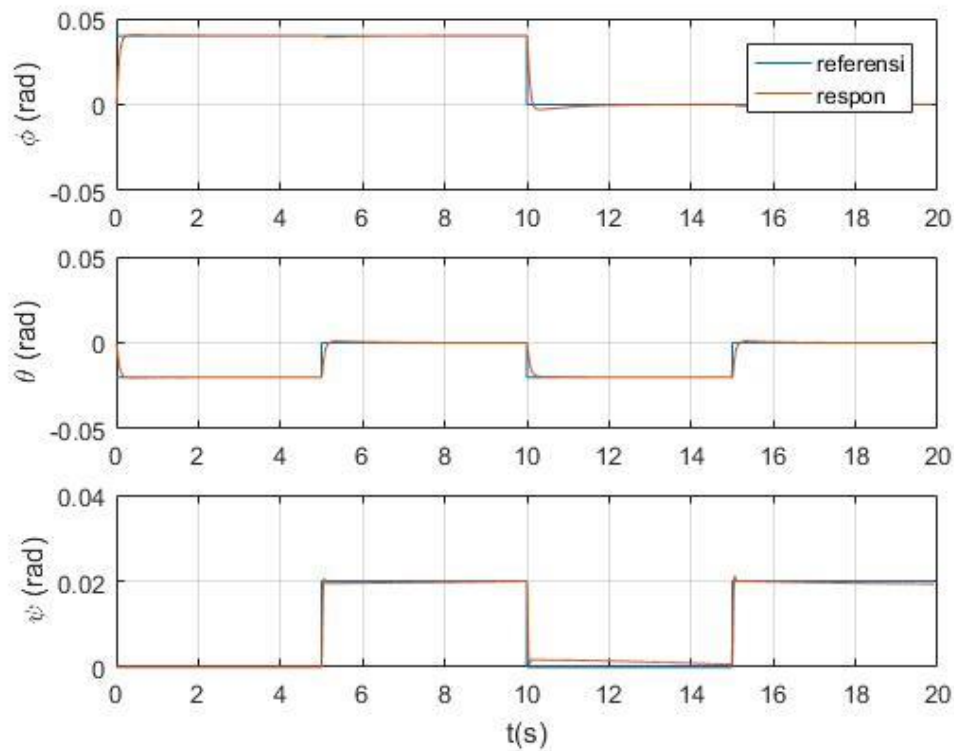
## 6.2 Validasi Hasil analisis peran sensor GPS

Simulasi yang dilakukan pada GPS-receiver adalah mirip dengan yang dilakukan pada IMU sempurna dan sensor gyro. Parameter uji yang digunakan diberikan pada Tabel 6.3. Respon sistem diberikan pada Gambar 6.5. Pada respons sudut roll,  $\phi$ , respons sistem stabil dan menuju nilai yang diinginkan, menandakan bahwa umpan balik dari observer yang dirancang berdasarkan analisis adalah berhasil. Begitu juga untuk sudut pitch dan yaw,  $\theta$  dan  $\psi$ . Oleh karena itu lemma 7-8 tervalidasi.

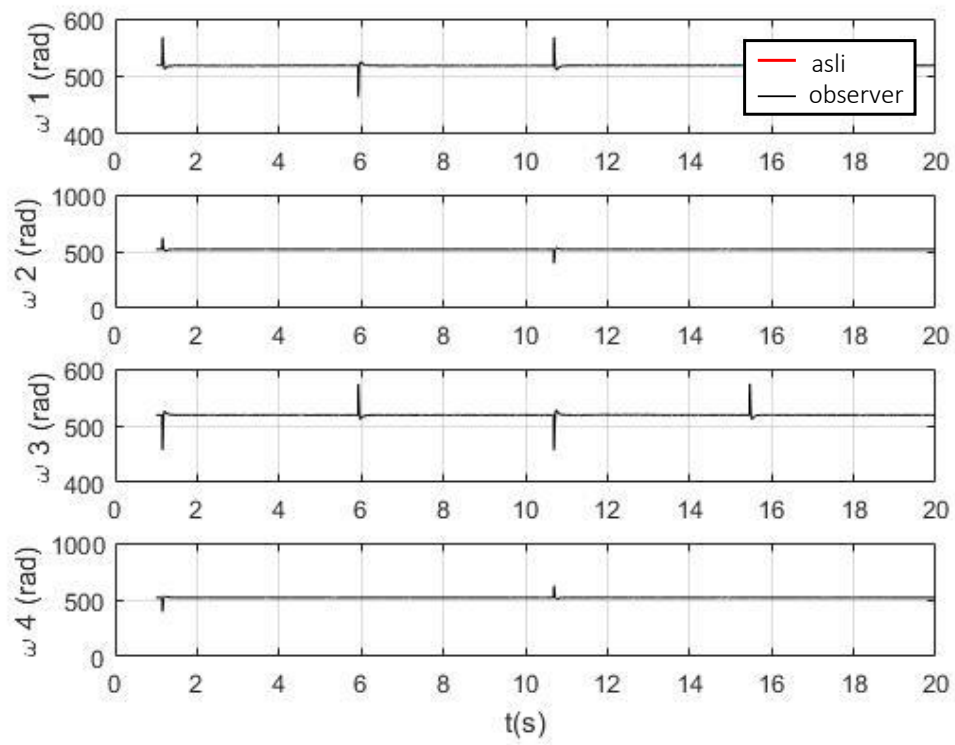
Sedangkan hasil perbandingan state-state rotor sesungguhnya dan hasil perhitungan dari observer diberikan pada Gambar 6.6. Hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma yang diajukan mampu menghitung state-state rotor yang sesuai.

Tabel 6.4 Parameter uji simulasi GPS-receiver

No.	Parameter / Sinyal Referensi		Satuan	Nilai	Periode
1	$K_{b1}$	$K_{bp}$	-	3	-
		$K_{bi}$	-	2	-
		$K_{bd}$	-	2.1	-
2	$K_{b2} = \dots = K_{b4}$	$K_{bp}$	-	0.2	-
		$K_{bi}$	-	0.01	-
		$K_{bd}$	-	0.2	-
3	$K_{p1} = \dots = K_{p4}$	$K_{pp}$	-	1000	-
		$K_{pi}$	-	100	-
		$K_{pd}$	-	0	-
4	$z^r$		m	20	-
5	$\phi^r$		rad	[0.04 0]	10 detik
6	$\theta^r$		rad	[-0.02 0 -0.02]	10 detik
7	$\psi^r$		rad	[0 0.03]	10 detik



Gambar 6.5 Respons sudut Euler quadcopter ketika GPS-receiver



Gambar 6.6 Hasil perhitungan state rotor

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## **BAB 7**

### **KESIMPULAN**

Kami telah mempresentasikan keterkendalian dan keteramatan quadcopter di bawah berbagai variasi kegagalan sensor dengan memasukkan dinamika rotor. Pertama, dinamika sistem kaskade quadcopter telah diturunkan. Kedua, variasi kegagalan IMU dan GPS telah dipertimbangkan. Keterkendalian sistem loop tertutup tidak dipengaruhi oleh kegagalan sensor, sedangkan Keterkendalian sistem loop terbuka adalah terpengaruh, ini dikarenakan keterkendalian sistem loop tertutup bergantung pada state-state yang dapat diumpan balikkan. Sementara keteramatan sistem sangat dipengaruhi oleh kegagalan sensor. Dalam beberapa variasi kegagalan sensor yang telah dipertimbangkan tersebut, rotor selalu dapat diamati. Keteramatan sistem dapat dipertahankan di bawah kegagalan sensor accelero dan tidak adanya sensor rotor. Simulasi menunjukkan keakuratan metode yang diusulkan.

Saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya diberikan pada poin-poin berikut

- Analisis dilakukan pada bentuk nonlinear quadcopter
- Terdapat noise pengukuran
- Terdapat perancangan pendeteksi kegagalan

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1999.
- [2] H. J. Sussmann and V. Jurdjevic, "Controllability of nonlinear systems," *Journal of Differential Equations*, vol. 12, no. 1, pp. 95-116, 1972.
- [3] A. J. Krener and R. Hermann, "Nonlinear Controllability and Observability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pp. 728-740, 1977.
- [4] A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco, "The Observability of Cascade Connected Nonlinear Systems," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 14, no. 2, pp. 337-342, 1981.
- [5] J. Tsinias and N. Kalouptsidis, "Output feedback design and controllable cascade connections of nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 2, no. 4, pp. 230-236, 1982.
- [6] J. Tsinias and N. Kalouptsidis, "Controllable Cascade Connections of Nonlinear Systems," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 11, no. 11, pp. 1229-1244, 1987.
- [7] C.-T. Chen, Desoer and C. A., "Controllability and Observability of Composite System," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12, no. 4, pp. 402-409, 1967.
- [8] G. G. Gilbert, "Controllability and Observability of Multivariable Control Systems," *JSIAM Control*, vol. 2, no. 1, pp. 128-151, 1963.
- [9] A. Lanzon, A. Freddi and S. Longhi, "Flight Control of a Quadrotor Vehicle Subsequent to a Rotor Failure," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 37, no. 2, pp. 580-591, 2014.
- [10] A. Freddi, A. Lanzon and S. Longhi, "A Feedback Linearization Approach to Fault Tolerance in Quadrotor Vehicles," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 5413-5418, 2011.
- [11] G.-X. Du, Q. Quan and K.-Y. Cai, "Controllability Analysis and Degraded Control for a Class of Hexacopters Subject to Rotor Failures," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 78, no. 1, p. 143-157, 2015.

- [12] M. Saied, H. Shraim, B. Lussier, I. Fantoni and C. Francis, "Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control of an Octorotor UAV Using Motors Speeds Measurement," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 5263-5268, 2017.
- [13] M. Saied, H. Shraim, B. Lussier, I. Fantoni and C. Francis, "Local Controllability and Attitude Stabilization of multirotor UAVs: Validation on a coaxial Octorotor," *Robotic And Autonomous System*, vol. 91, pp. 128-138, 2017.
- [14] M. W. Mueller and R. D'Andrea, "Stability and control of a quadcopter despite the complete loss of one, two, or three propellers," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Hong Kong, 2014.
- [15] T. Bresciani, "Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter," *LUP Student Papers*, 2008.
- [16] M. Lhous, M. Rachik, J. Bouyaghroumni and A. Tridane, "On the output controllability of a class of discrete nonlinear distributed systems: a fixed point theorem approach," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 6, no. 2, p. 768-777, 2018.
- [17] C. Commault, J.-M. Dion and D. H. Trinh, "Observability Preservation Under Sensor Failure," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1554-1559, 2008.
- [18] W. Kang and L. Xu, "Partial observability for some distributed parameter systems," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 2, no. 4, pp. 587-596, 2014.
- [19] K. Suyama and F. Zhang, "A new Type of Reliable Control System Using Decision by Majorit," *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041)*, vol. 1, pp. 52-56, 1997.
- [20] K. Suyama, "Reliable Stability Against Sensor Failures in Passive Redundancy," *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, vol. 80, no. 5, pp. 96-104, 1997.
- [21] K. Suyama, "A new framework for control systems with tolerance against sensor failures," *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, vol. 83, no. 10, pp. 27-36, 2000.
- [22] F. Caliskan and C. Hajiyeve, "Reconfigurable control of an UAV against sensor/actuator failures," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 9, pp. 7-12, 2015.

- [23] T. Peni, B. Vanek, Z. Szabó and J. Bokor, “Dynamic Sensor Allocation Framework for Fault Tolerant Flight Control,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 3477-3482, 2014.
- [24] L. Autonne, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 30, pp. 121-133, 1902.
- [25] C. Eckart and G. Young, “A principal axis transformation for non-hermitian matrices,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 45, no. 2, pp. 118-121, 1939.
- [26] A. Ben-Israel and T. N. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Springer Science & Business Media, 2003.
- [27] J. C. A. Barata and M. S. Hussein, “The Moore-Penrose Pseudoinverse: A Tutorial Review of the Theory,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 42, no. 1-2, pp. 146-165, 2011.
- [28] S. Nicosia, A. Tornambe and P. Valigi, “Use of observers for the inversion of nonlinear maps,” *Systems & Control Letters*, vol. 16, no. 6, pp. 447-455, 1991.
- [29] J. Zhao and Y. Yu, *Brushless DC Motor Fundamental Application Note*, MPS the Future of Analog IC Technology, 2014.
- [30] V. C. Klema and A. J. Laub, “The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 2, pp. 164-176, 1980.
- [31] A. Noureldin, T. B. Karamat and J. Georgy, *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration*, Berlin: Springer, 2013.
- [32] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems* (3rd ed.), New jersey: Prentice Hall, 2002.
- [33] B. T. M. Leong, S. M. Low and M. P.-L. Ooi, “Low-Cost Microcontroller-based Hover Control Design of a Quadcopter,” *Procedia Engineering*, vol. 41, pp. 458-464, 2012.
- [34] M. Pedley, “Tilt Sensing Using Three-Axis Accelerometer,” *Freescale semiconductor application note*, 2013.
- [35] M. D. Shuster and F. L. Markley, “General Formula for Extracting the Euler Angles,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, no. 1, pp. 215-221, 2006.

- [36] K. Gade, "The Seven Ways to Find Heading," *The Journal of Navigation*, vol. 69, pp. 955-970, 2016.
- [37] V. L. Timchenko, "Synthesis of Variable Structure Systems for Stabilization of Ship at Incomplete Controllability," *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 44, no. 6, pp. 8-19, 2012.
- [38] E. M. Potapenko, "Simplified Linear-System Restorability and Controllability Criteria and Their Application in Robotics," *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 28, no. 5-6, pp. 146-151, 1996.
- [39] M. J. Blachuta, V. D. Yurkevich and K. Wojciechowski, "Robust Quasi Nid Aircraft 3d Flight Control Under Sensor Noise," *Kybernetika*, vol. 35, no. 5, pp. 637-650, 1999.
- [40] C.-J. Seo and B. K. Kim, "Robust And Reliable H-infinite Output Feedback Control for Linear Systems With Parameter Uncertainty and Actuator Failure," *Kybernetika*, vol. 35, no. 4, pp. 429-440, 1999.
- [41] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal and N. H. McClamroch, "Rigid-Body Attitude Control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 31, no. 3, pp. 30-51, 2011.
- [42] K. Lesser and M. Oishi, "Reachability for Partially Observable Discrete Time Stochastic Hybrid Systems," *Automatica*, vol. 50, no. 8, pp. 1989-1998, 2014.
- [43] Quanser, Quanser Qball-X4: User Manual, Quanser.
- [44] M. J. Khayar and M. Ouzahra, "Partial controllability of the bilinear reaction–diffusion equation," *International Journal of Dynamics and Control*, pp. 1-8, 2018.
- [45] N. F. Kirichenko and V. T. Matvienko, "Optimal Synthesis of Structures for Linear Control Systems," *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 30, no. 1, pp. 18-28, 1988.
- [46] T. I. Zohdi, "On the dynamics and breakup of quadcopters using a discrete element method framework," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 327, pp. 503-521, 2017.
- [47] C. R. Rao and S. K. Mitra, "Generalized inverse of a matrix and its applications," *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, pp. 601-620, 1972.

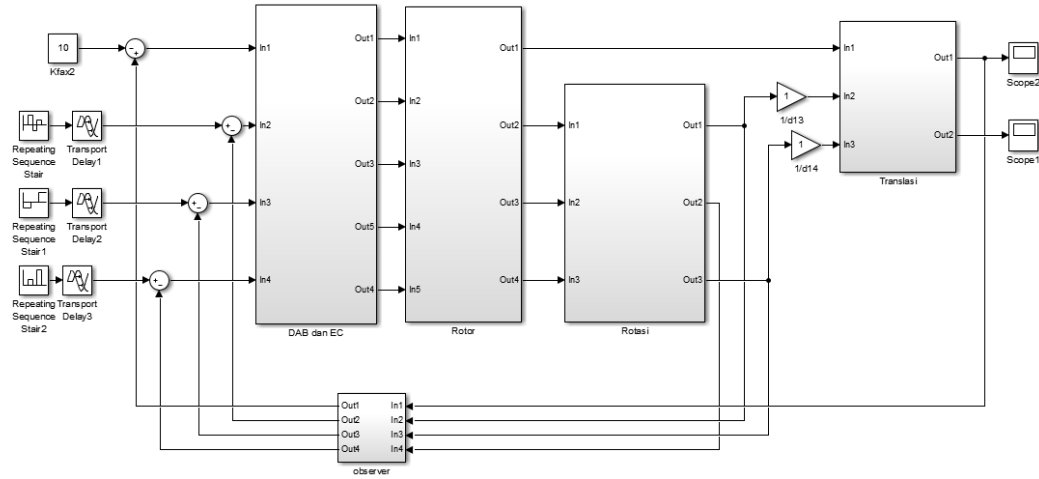
- [48] C. Zhang, S. Li and S. Ding, “Finite-Time Output Feedback Stabilization and Control For A Quadrotor Mini-Aircraft,” *Kybernetika*, vol. 48, no. 2, pp. 206-222, 2012.
- [49] S. Nadda and A. Swarup, “Decoupled control design for robust performance of quadrotor,” *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 6, no. 3, p. 1367–1375, 2018.
- [50] V. N. Shashikhin, “Controllability and Observability Criteria of Interval Systems while Robust Control Synthesis,” *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 34, no. 9, 2002.
- [51] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [52] S. M. Onishchenko, “Analysis of the Conditions of Controllability and Stabilizability of Nonlinear Dynamical Systems,” *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 43, no. 5, pp. 10-22, 2011.
- [53] S. Nicosia, A. Tornambe and V. P., “Use of Observers for The Inversion of Nonlinear Maps,” *System and Control Letters*, vol. 16, pp. 447-455, 1991.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

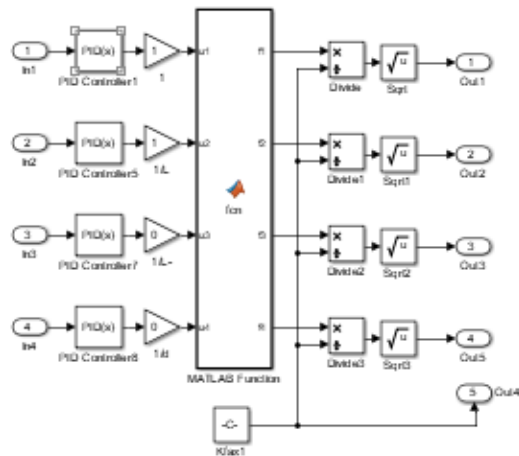


## LAMPIRAN

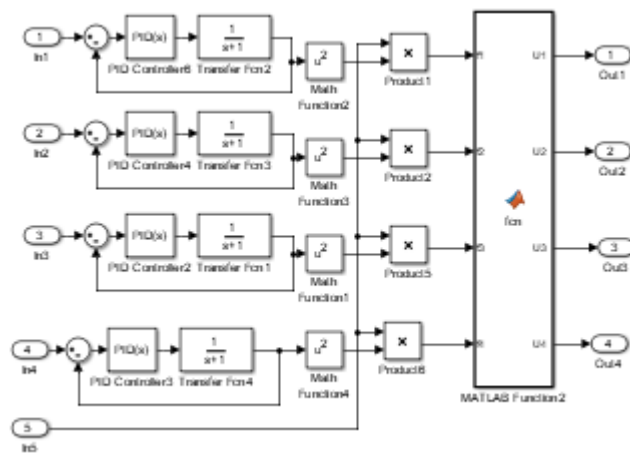
### Simulink sistem



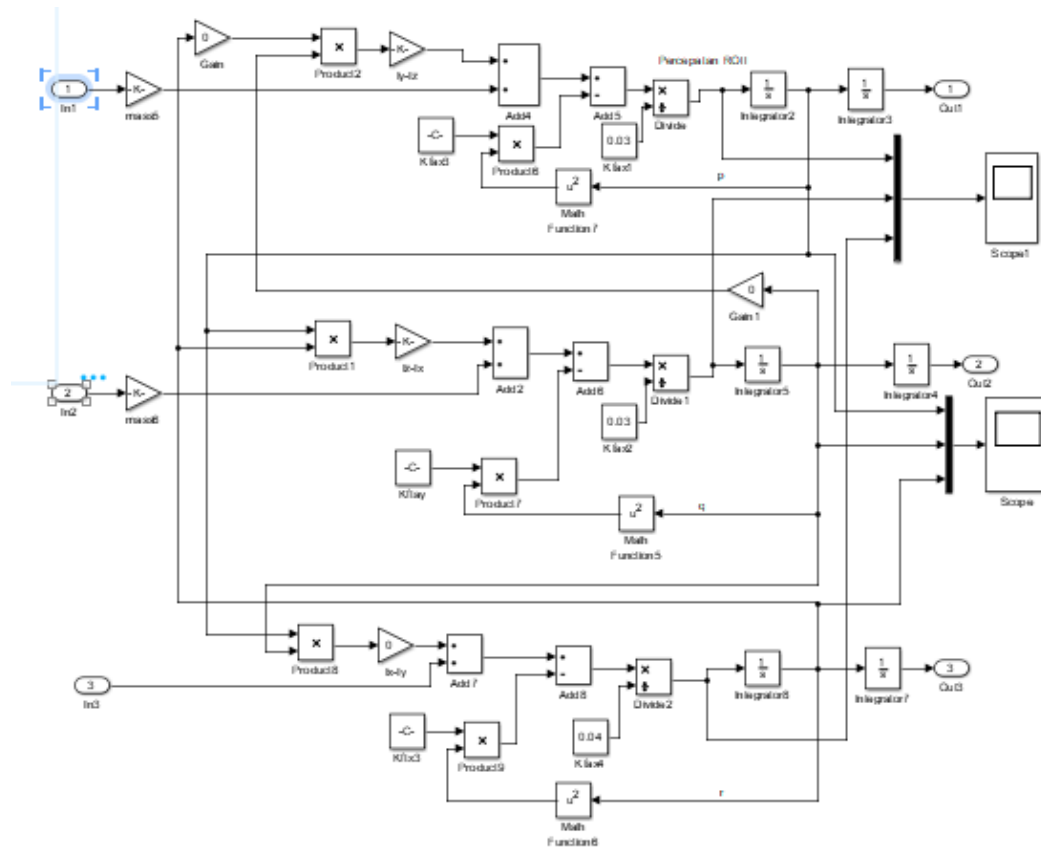
### Simulink DAB dan EC



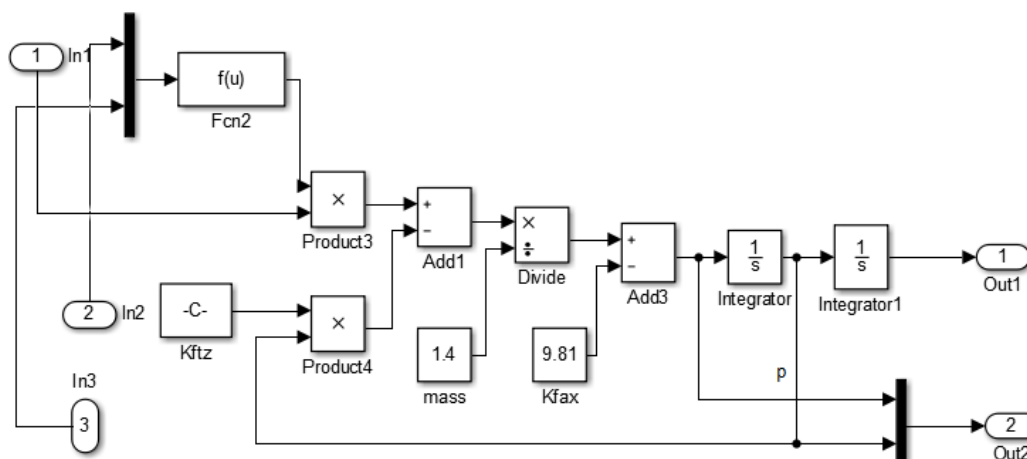
### Rotor QC



## Rotasi QC



## Translasi QC



## **DAFTAR INDEX**

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



Penulis adalah pemuda dengan darah Madura, lahir di Bangkalan pada tanggal 9 September 1990. Penulis menyelesaikan pendidikan dasarnya di SDN 01 Karang Duwak. Pendidikan menengah pertama pada SMPN 01 Batonaong. Selanjutnya penulis nyantri di Pondok Pesantren Salafiah Syafiiyah, sekaligus menyelesaikan pendidikan menengah atas di SMA Ibrahimy Sukorejo. Penulis menempuh pendidikan S1 pada jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan didanai oleh Kementerian Agama melalui program santri berprestasi, sedangkan S2 ditempuh pada jurusan Teknik Elektro di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan didanai oleh Lembaga Pengelola Dana Pendidikan (LPDP) dengan angkatan PK-48.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*